بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور
WWW.KONKUR.INFO
Konkur.info
https://konkur.info

۱- جمله سوم یک دنباله حسابی با قدرنسبت صحیح، که فقط ۵ جمله منفی دارد، برابر ۵- است. جمله شانزدهم این دنباله کدام است؟

https://konkur.info

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۲- اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی کرده‌ایم که تعداد اعداد دسته nاُم برابر با nاُمین عدد فرد طبیعی باشد، یعنی $\{۲\},\{۴,۶,۸\},\{۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸\},...$ ، واسطه حسابی عدد اول و آخر دسته دهم کدام است؟

https://konkur.info

۱) ۱۴۶ ۲) ۱۴۵ ۳) ۱۸۳ ۴) ۱۸۲

۳- دنبالهٔ حسابی و متناهی t_n : ۵,۱۰,۱۵,۲۰,....,۱۰۰۰ را در نظر بگیرید. با استفاده از جملات دنباله t_n ، چند دنباله هندسی شامل سه جمله و با قدرنسبت ۷ می‌توان نوشت؟

https://konkur.info

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۴- خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^{۱۴۰۲}-۲x^{۱۴۰۱}+۳x^{۱۴۰۰}-\ldots-۱۴۰۲x+۱۴۰۳$ بر $x-۱$ را $q(x)$ می‌نامیم. باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x+۱$ کدام است؟

۱) $-۷۰۱^۲$ ۲) -۷۰۱×۷۰۲ ۳) -۷۰۱ ۴) -۱۴۰۳×۷۰۱

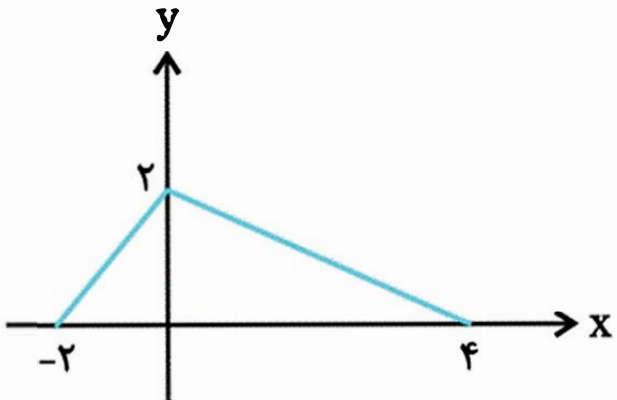
https://konkur.info

۵- نمودار تابع $f(x)=k(1+(x-k)^3)$ نمودار وارون خود را در سه نقطه قطع می‌کند. اگر حاصل ضرب طول این نقاط برابر ۷ باشد، مجموع آن‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\sqrt[3]{6}$

https://konkur.info

۶- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر مساحت سطح محدود به نمودار تابع $g(x) = f(k-|x|)$ و محور xها برابر $\frac{۱۵}{۲}$ باشد، مقدار $f(k)$ کدام است؟ $(۰ < k < ۴)$



۱) $\frac{۷}{۴}$

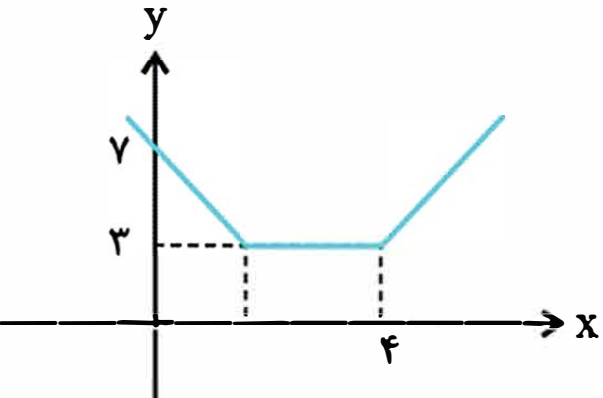
۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۱

۴) $\frac{۴}{۳}$

https://konkur.info

۷- در شکل زیر نمودار تابع گلدانی f رسم شده است. حدود k کدام باشد تا نمودار تابع $y = f(x) + kx$ اکیداً صعودی شود؟



۱) $(\frac{۵}{۴}, +\infty)$

۲) $(-\frac{۵}{۲}, +\infty)$

۳) $(\frac{۵}{۲}, +\infty)$

۴) $(-\frac{۵}{۴}, +\infty)$

https://konkur.info

۸- اگر f یک تابع اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{f(۳[x]^۲)-f([x]^۳+۳[x-۳])}$ شامل چند عدد طبیعی است؟
([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

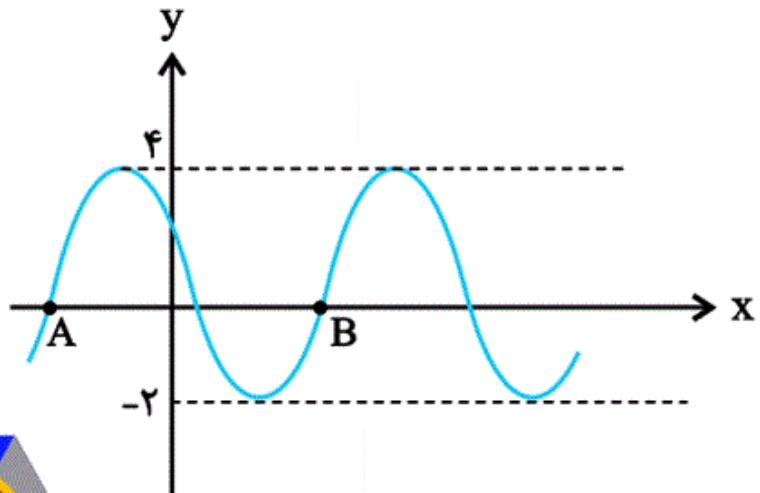
https://konkur.info

۹- اگر $f(x)=1-2^x$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ باشد، برد تابع $g^{-1}of$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

https://konkur.info

۱۰-شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\sin bx+c$ را نشان می دهد . اگر $x_B-x_A=\frac{5\pi}{12}$ باشد، حاصل $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{5}{24}$

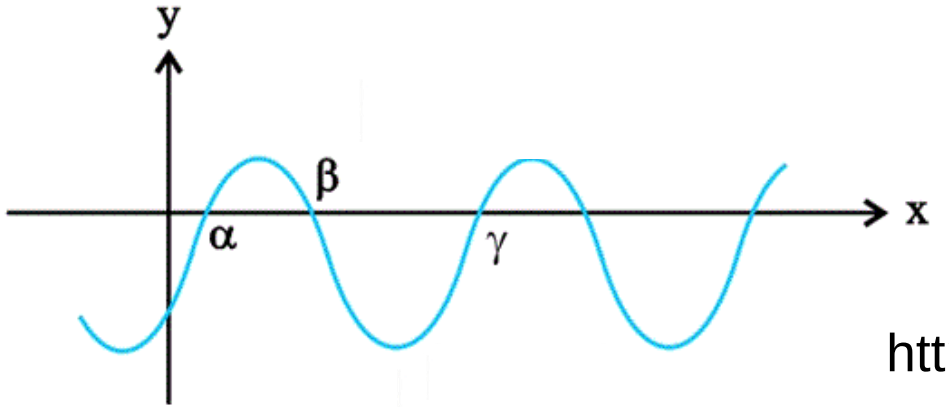
۲) $\frac{5}{24}$

۳) $\frac{5}{8}$

۴) $-\frac{5}{8}$

https://konkur.info

۱۱- نمودار تابع $y = a\sin bx + c$ در شکل زیر رسم شده‌است. اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۳}$ باشد، حاصل $\beta + \gamma$ کدام است؟



https://konkur.info

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$

۲) π

۳) $\frac{۳\pi}{۴}$

۴) به مقادیر پارامترها بستگی دارد.

۱۲- نقاط انتهایی کمان‌های جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱+\sin^۲ x}{۱-\tan^۲ x}=۳$ روی دایره مثلثاتی تشکیل یک چندضلعی محدب می‌دهند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

https://konkur.info

۱) $۱۲-۴\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۲۰\sqrt{۷}-۴۲}$ ۳) $۱۰\sqrt{۷}-۲۱$ ۴) $۴\sqrt{۵\sqrt{۷}-۱۳}$

۱۳- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\sqrt[3]{\cos x}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

https://konkur.info

۱۴- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۸\cos^۲ x\cos^۲ ۲x\cos^۲ ۴x}{۱-\cos^۲ ۲x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

https://konkur.info

۱۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۸^x-(\frac{۱}{۲})^{[-۲x]}}{۲^{x+۱}-۴} & ;x\neq ۱\\ a & ;x=۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ دارای پیوستگی راست باشد، مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۸ ۲) $\log ۳$ ۳) ۴ ۴) ۶

https://konkur.info

۱۶- توابع $f(x)=\begin{cases} x-[x] & ;x\notin \mathbb{Z} \\ [x]+[-x] & ;x\in \mathbb{Z} \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۱ & ;x>۰ \\ ۰ & ;x=۰ \\ -۱ & ;x<۰ \end{cases}$ مفروض‌اند. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof در بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

https://konkur.info

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷- تابع $f(x)=(ax^{۲}-۴x+b)[x]$ در بازهٔ $(۲,۵)$ پیوسته است. حاصل $[a+b]$ کدام است؟ ($[\,]$، نماد جزءصحیح است.)

https://konkur.info

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۸- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تابع $y = [x^۲] - x[x]$ پیوسته است، کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

https://konkur.info

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

۱۹- اگر $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\frac{\tan 2x}{g(x)}+\sin x$ باشد، حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+} g(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) موجود نیست.

https://konkur.info

۲۰- اگر $\lim_{x\to ۳}((a[x]+[-x])\tan(\frac{\pi x}{۲}))=-\infty$ ، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $(۱,۲)$ ۲) $\mathbb{R}-[\frac{۳}{۲},\frac{۴}{۳}]$ ۳) $\mathbb{R}-[۱,۲]$ ۴) $(\frac{۳}{۲},\frac{۴}{۳})$

https://konkur.info

۱- گزینهٔ «۴»

نام طراح: «مسعود برملا»

با یک دنباله صعودی با جملات اولیه منفی روبه‌رو هستیم.

آخرین جمله منفی: $a_5 < 0 \Rightarrow a_1 + 4d < 0 \Rightarrow a_3 + 2d < 0 \Rightarrow -5 + 2d < 0 \Rightarrow 2d < 5 \Rightarrow d < \frac{5}{2}$ (۱)

اولین جمله مثبت: $a_6 > 0 \Rightarrow a_1 + 5d > 0 \Rightarrow a_3 + 3d > 0 \Rightarrow -5 + 3d > 0 \Rightarrow 3d > 5 \Rightarrow d > \frac{5}{3}$ (۲)

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{5}{3} < d < \frac{5}{2} \xrightarrow{d \text{ عددصحیح}} d = 2 \xrightarrow{a_3 = -5} a_1 = -9$$

پس جملهٔ عمومی دنباله $a_n = 2n - 11$ است و داریم:

$$a_{16} = 2(16) - 11 = 21$$

۲- گزینهٔ «۴»

نام طراح: «محمدرضا راسخ»

ابتدا تعداد اعداد زوج استفاده شده تادسته نهم را پیدا می‌کنیم:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 17 = \frac{(17+1)\times 9}{2} = 81$$

تا دسته نهم به عدد فرد ۱۷ می‌رسیم، بنابراین تا انتهای دسته نهم ۸۱ عدد زوج استفاده شده و شروع دسته دهم با ۸۲ امین عدد زوج یعنی ۱۶۴ است.

به طور مشابه عدد آخر دسته دهم را حساب می‌کنیم:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 17 + 19 = \frac{(19+1)\times 10}{2} = 100$$

پس انتهای دسته دهم ۱۰۰ امین عدد زوج یعنی ۲۰۰ است.

واسطه حسابی این دو عدد برابر $\frac{164 + 200}{2} = 182$ است.

۳- گزینهٔ «۳»

نام طراح: «رضا طاری»

جملات دنباله هندسی $a, 7a, 49a$ هستند. باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a \geq 5 \\ 49a \leq 1000 \Rightarrow a \leq 20 \end{cases}$$

این یعنی a باید عددی مضرب ۵ در بازهٔ $[5,20]$ باشد که ۴ مقدار برای آن پیدا می‌شود.

۴- گزینهٔ «۲»

نام طراح: «عادل حسینی»

$$p(x) = (x-1)q(x) + r \qquad ; r = p(1)$$
$$p(1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots - 1402 + 1403$$
$$= (1 + 3 + 5 + \ldots + 1403) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 1402) = 702^2 - 701 \times 702 = 702$$

پس رابطه تقسیم به صورت زیر است:

$$p(x) = (x-1)q(x) + 702$$

باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x+1$ برابر $q(-1)$ است، پس در تساوی بالا $x = -1$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} p(-1) = -2q(-1) + 702 \\ p(-1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1403 = 702 \times 1403 \end{array}\right\} \Rightarrow q(-1) = -701 \times 702$$

https://konkur.info

۵- گزینهٔ «۲»

نام طراح: «عادل حسینی»

نقطهٔ (k,k) روی نمودار تابع f و به تبع آن روی نمودار تابع f^{-1} نیز قرار دارد. این یعنی یکی از نقاط تقاطع همین نقطه است و از آنجا که این نکته مرکز تقارن نمودار تابع f است، دو نقطه دیگر باید نسبت به (k,k) متقارن باشند، پس آن‌ها را $(k-d,k-d)$ و $(k+d,k+d)$ در نظر می‌گیریم؛ زیرا k را مثبت در نظر می‌گیریم و در این صورت تابع اکیداً صعودی f نمودار وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند:

$$f(k+d)=kd^3+k=k+d\Rightarrow kd^3=d\xrightarrow{d\neq 0}kd^2=1$$

حاصل‌ضرب طول نقاط رابرابر ۷ قرار می‌دهیم:

$$k(k+d)(k-d)=k(k^2-d^2)=k(k^2-\frac{1}{k})=k^3-1=7\Rightarrow k=2$$

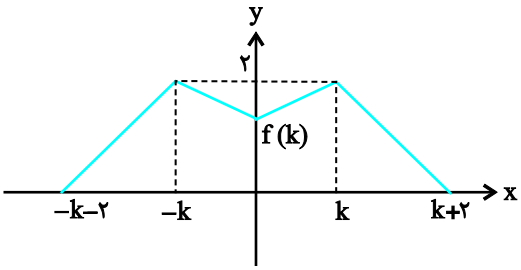
و مجموع طول نقاط تقاطع برابر $3k=6$ است.

دقت کنید که اگر فرض کنیم $k<0$ باشد، تابع اکیداً نزولی f نمودار وارون خود را روی خط $y=-x+2k$ قطع می‌کند و در نتیجه با جای‌گذاری مختصات نقاط $(k-d,k+d)$ و $(k+d,k-d)$ در ضابطهٔ تابع و هم چنین محاسبات مربوط به حاصل‌ضرب طول نقاط، $k=\sqrt[3]{6}$ به دست می‌آید که غیرقابل قبول است.

۶- گزینهٔ «۲»

نام طراح: «عادل حسینی»

برای رسم نمودار تابع g نمودار تابع f را k واحد به چپ انتقال می‌دهیم. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم و در نهایت قرینهٔ قسمت سمت راست آن را نسبت به محور yها به جای قسمت چپ قرار می‌دهیم. داریم:



مساحت سطح محدود برابر است با:

$$S=2[\frac{2\times 2}{2}+\frac{2+f(k)}{2}\times k]\Rightarrow S=4+k(f(k)+2)$$

هم چنین با توجه به نمودار تابع f به سادگی می‌توان نوشت که $f(k)=\frac{4-k}{2}$

$$S(k)=4+k(\frac{8-k}{2})=12-\frac{1}{2}(k-4)^2$$

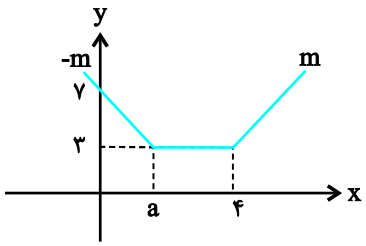
$$\xrightarrow{S=\frac{15}{2}}12-\frac{1}{2}(k-4)^2=\frac{15}{2}\Rightarrow(k-4)^2=9\xrightarrow{0<k<4}k=1$$

پس $f(k)=f(1)$ برابر $\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$ است.

https://konkur.info

۷- **گزینهٔ «۳»** نام طراح: «عادل حسینی»

فرض کنید مطابق شکل شیب نیم‌خط‌ها m و $-m$ باشد و تابع در بازهٔ $[a,۴]$ ثابت باشد.



دراین صورت ضابطهٔ تابع $f(x)=\frac{m}{۲}(|x-a|+|x-۴|)$ است.

حال از روی کم‌ترین مقدار تابع و هم چنین عرض از مبدأ آن مقادیر a و m را می‌یابیم.

$$f_{min}=\frac{m}{۲}(۴-a)=۳\Rightarrow m(۴-a)=۶\ (۱)$$

$$f(۰)=\frac{m}{۲}(a+۴)=۷\Rightarrow m(۴+a)=۱۴\ (۲)$$

با تقسیم (۲) بر (۱) داریم:

$$\frac{۴+a}{۴-a}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow a=\frac{۸}{۵}\xrightarrow{\text{جایگذاری}}m=\frac{۵}{۲}$$

پس شیب نمودار تابع دربازهٔ $(-\infty,\frac{۸}{۵}]$ برابر $-\frac{۵}{۲}$ است و حدود k باید $(\frac{۵}{۲},+\infty)$ باشد تا kx بر قسمت نزولی تابع f غلبه کند و تابع $y=f(x)+kx$ اکیداً صعودی شود.

۸- **گزینهٔ «۳»** نام طراح: «محمدرضا راسخ»

برای یافتن دامنه تابع g باید عبارت زیر رادیکال را نامنفی قرار دهیم:

$$f(۳[x]^۲)-f([x]^۳+۳[x-۳])\geq ۰$$

$$\Rightarrow f(۳[x]^۲)\geq f([x]^۳+۳[x-۳])\xrightarrow{f\text{ اکیدانزولی}}۳[x]^۲\leq[x]^۳+۳[x-۳]\Rightarrow[x]^۳-۳[x]^۲+۳[x]-۹\leq ۰$$

با فرض $[x]=t$ داریم:

$$t^۳-۳t^۲+۳t-۱-۸\leq ۰$$

$$\Rightarrow(t-۱)^۳\leq ۸\Rightarrow t-۱\leq ۲\Rightarrow t=[x]\leq ۳\Rightarrow x<۴$$

بنابراین دامنه تابع شامل اعداد طبیعی ۱، ۲ و ۳ است.

۹- **گزینهٔ «۲»** نام طراح: «عادل حسینی»

تابع f با دامنهٔ $D_f=\mathbb{R}$ و برد $R_f=(-\infty,۱]$ اکیداً نزولی و تابع g با دامنهٔ $D_g=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ و برد $R_g=\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

حال داریم:

$$D_{g^{-۱}of}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_{g^{-۱}}\}=\mathbb{R}$$

و برای برد تابع $g^{-۱}of$ داریم:

$$f(x)\leq ۱\xrightarrow{g^{-۱}}g^{-۱}(f(x))\leq g^{-۱}(۱)\qquad(*)$$

$$g^{-۱}(۱)=m\Rightarrow g(m)=\frac{m}{\sqrt{۲m+۱}}=۱\xrightarrow{m>۰}m=\sqrt{۲}+۱$$

$$\xrightarrow{(*)}g^{-۱}(f(x))\leq\sqrt{۲}+۱$$

پس برد تابع $g^{-۱}of$ بازهٔ $(-\infty,\sqrt{۲}+۱]$ و شامل فقط یک عدد طبیعی است.

https://konkur.info

۱۰- گزینهٔ «۴»

نام طراح: «علیرضا نراف‌زاده»

بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع به ترتیب ۴ و ۲- است پس داریم:

$$\begin{cases} |a|+c=۴ \\ -|a|+c=-۲ \end{cases} \Rightarrow |a|=۳, c=۱$$

فاصله دو نقطه A و B نیز برابر دوره تناوب است و داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۵\pi}{۱۲} \Rightarrow |b|=\frac{۲۴}{۵}$$

اما نمودار تابع f در $x=۰$ نزولی است پس $ab<۰$ است و داریم:

$$\left|\frac{ac}{b}\right|=\frac{۳\times ۱}{\frac{۲۴}{۵}}=\frac{۱۵}{۲۴}=\frac{۵}{۸} \xrightarrow{ab<۰} \frac{ac}{b}=-\frac{۵}{۸}$$

۱۱- گزینهٔ «۲»

نام طراح: «عادل حسینی»

α، β و γ صفرهای تابع یا همان جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند.

$$\Rightarrow a\sin bx+c=۰ \Rightarrow \sin bx=-\frac{c}{a}=\sin\theta$$

θ را زاویه‌ای حاده فرض کرده‌ایم که سینوس آن برابر $-\frac{c}{a}$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} bx=۲k\pi+\theta \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{b}+\frac{\theta}{b} & (۱) \\ bx=۲k\pi+\pi-\theta \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{b}+\frac{\pi-\theta}{b} & (۲) \end{cases}$$

جواب‌های α و γ مربوط به دسته جواب (۱) و جواب β مربوط به دسته جواب (۲) است.

$$\xrightarrow{k=۰} \alpha=\frac{\theta}{b}, \beta=\frac{\pi-\theta}{b}$$

$$\xrightarrow{k=۱} \gamma=\frac{۲\pi}{b}+\frac{\theta}{b}$$

$$\xrightarrow{\alpha+\beta=\frac{\pi}{۳}} \frac{\theta}{b}+\frac{\pi}{b}-\frac{\theta}{b}=\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow b=۳$$

در این شرایط داریم: $\alpha=\frac{\theta}{۳}$، $\beta=\frac{\pi-\theta}{۳}$ و $\gamma=\frac{۲\pi+\theta}{۳}$ است.

$$\Rightarrow \beta+\gamma=\frac{۳\pi}{۳}=\pi$$

۱۲- گزینهٔ «۴»

نام طراح: «عادل حسینی»

$$\frac{۱+\sin^۲ x}{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=۳ \Rightarrow \frac{\cos^۲ x(۱+\sin^۲ x)}{\cos ۲x}=۳ \Rightarrow \cos^۲ x+\sin^۲ x\cos^۲ x=۳\cos ۲x$$

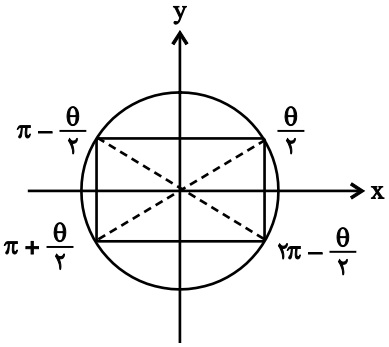
$$\Rightarrow \frac{۱+\cos ۲x}{۲}+\frac{۱}{۴}(۱-\cos^۲ ۲x)=۳\cos ۲x \Rightarrow \cos^۲ ۲x+۱۰\cos ۲x-۳=۰$$

https://konkur.info

جواب‌های معادلهٔ بالا با تغییر متغیر $T=\cos 2x$ جواب‌های معادلهٔ $\cos 2x=2\sqrt{7}-5$ هستند. حال اگر فرض کنیم که θ زاویه‌ای حاده باشد که کسینوس آن برابر $2\sqrt{7}-5$ است داریم:

$$\cos 2x=\cos\theta \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\theta \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\theta}{2}$$

انتهای کمان‌های این دسته جواب روی دایره مثلثاتی به صورت زیر است:



چهارضلعی حاصل یک مستطیل است که مساحت آن برابر $S=8(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})=2\sin\theta$ است.

$$\xrightarrow{\cos\theta=2\sqrt{7}-5}\sin\theta=\sqrt{20\sqrt{7}-52} \quad \Rightarrow S=2\sqrt{20\sqrt{7}-52}=2\sqrt{4(5\sqrt{7}-13)}$$

۱۳- گزینهٔ «۲»

نام طراح: «فرشاد صدیقی‌فر»

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x})}{(1-\sqrt[3]{\cos x})(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x}(3)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(3)}{\cos^2 x}=6$$

۱۴- گزینهٔ «۱»

نام طراح: «محمدرضا راسخ»

وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$، حد صورت و مخرج برابر صفر می‌شود و داریم:

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2\cos^2 x)(2\cos^2 2x)(2\cos^2 4x)}{1-\cos^2 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2x)(1+\cos 4x)(1+\cos 8x)}{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 4x)(1+\cos 8x)}{(1-\cos 2x)}=\frac{2\times 2}{2}=2$$

۱۵- گزینهٔ «۴»

نام طراح: «حمید علیزاده»

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{8^x-(\frac{1}{2})^{[-2x]}}{2^{x+1}-4}=\lim_{x\to 1^+}\frac{8^x-(\frac{1}{2})^{-3}}{2(2^x-2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2^{3x}-2^3}{2(2^x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(2^x-2)(2^{2x}+2^2+2(2^x))}{2(2^x-2)}=\frac{4+4+4}{2}=\frac{12}{2}=6$$

برای پیوستگی باید $a=6$ باشد.

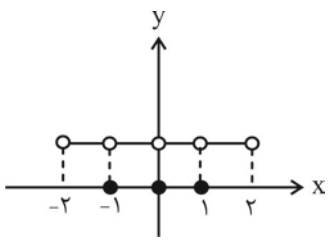
۱۶- گزینهٔ «۲»

نام طراح: «محمدرضا راسخ»

ابتدا ضابطه تابع gof را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x-[x] & ;x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=\begin{cases}1 & ;x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

حال نمودار تابع gof را در بازهٔ $(-2,2)$ رسم می‌کنیم:



بنابراین طبق نمودار تابع gof در بازهٔ $(-2,2)$ در نقاط $\{-1,0,1\}$ ناپیوسته است.

https://konkur.info

۱۷- گزینهٔ «۱»

نام طراح: «یاسین سپهر»

می‌دانیم تابع $y=[x]$ در نقاط به طول‌های صحیح ناپیوسته است و چون $f(x)=(ax^۲-۴x+b)[x]$ در بازهٔ $(۲,۵)$ پیوسته است، در نقاط به طول‌های ۳ و ۴ (داخل این بازه) پیوسته است که از این مطلب نتیجه می‌گیریم که اعداد ۳ و ۴ ریشه‌های معادله $ax^۲-۴x+b=۰$ هستند.

$$\Rightarrow \begin{cases} S=\frac{۴}{a}=۷\Rightarrow a=\frac{۴}{۷} \\ P=\frac{b}{a}=۱۲\Rightarrow b=\frac{۴۸}{۷} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=\frac{۵۲}{۷}\Rightarrow [a+b]=۷$$

۱۸- گزینهٔ «۴»

نام طراح: «عادل حسینی»

بدیهی است که تابع در $x\notin\mathbb{Z}$ و $x^۲\in\mathbb{Z}$ نا پیوسته است زیرا مجموع یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته، ناپیوسته است، پس اگر نقطهٔ پیوستگی داشته باشد، در نقاطی است که x عددی صحیح است.

در $x=۰$ تابع پیوسته است.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=f(۰)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰$$

حال $x=n$ و $x=-n$ را در نظر می‌گیریم که $n\in\mathbb{N}$ باشد داریم:

$$x=n:\begin{cases}\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=n^۲-۱-n(n-۱)=n-۱ \\ \lim\limits_{x\to n^+} f(x)=n^۲-n(n)=۰\end{cases}\xrightarrow{\text{پیوستگی}} n-۱=۰\Rightarrow n=۱\Rightarrow x=۱$$

$$x=-n:\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-n)^-} f(x)=n^۲+n(-n-۱)=-n \\ f(-n)=\lim\limits_{x\to(-n)^+} f(x)=n^۲-۱-n(n)=-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{پیوستگی}} n=۱\Rightarrow x=-۱$$

اما $f(-۱)=۰$ است، بنابراین تابع در $x=-۱$ ناپیوسته است. در نهایت تابع در نقاط صحیح $x=۰$ و $x=۱$ پیوسته است و این یعنی بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f در آن پیوسته است بازهٔ $(-۱,\sqrt{۲})$ است. طول این بازه برابر $۱+\sqrt{۲}$ است.

۱۹- گزینهٔ «۱»

نام طراح: «حمید علیزاده»

$$f(x)=\frac{\tan ۲x}{g(x)}+\sin x\xrightarrow{f(x)=\cos x}\cos x=\frac{\tan ۲x}{g(x)}+\sin x\Rightarrow g(x)=\frac{\tan ۲x}{\cos x-\sin x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} g(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}\frac{\tan ۲x}{\cos x-\sin x}=\frac{\tan(\frac{\pi}{۲})^+}{\cos(\frac{\pi}{۴})^+-\sin(\frac{\pi}{۴})^+}=\frac{-\infty}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^--(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^+}=\frac{-\infty}{۰^-}=+\infty$$

۲۰- گزینهٔ «۴»

نام طراح: «کاظم اجلالی»

حد چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۳^+}((a[x]+[-x])\tan(\frac{\pi x}{۲}))=\lim_{x\to ۳^+}((۳a-۴)\tan(\frac{\pi x}{۲})))=(۳a-۴)(-\infty)$$

$$\lim_{x\to ۳^-}((a[x]+[-x])\tan(\frac{\pi x}{۲}))=\lim_{x\to ۳^-}((۲a-۳)\tan(\frac{\pi x}{۲}))=(۲a-۳)(+\infty)$$

برای این که حد چپ و حد راست هر دو $-\infty$ باشند، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}۳a-۴>۰\Rightarrow a>\frac{۴}{۳} \\ ۲a-۳<۰\Rightarrow a<\frac{۳}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\frac{۴}{۳}<a<\frac{۳}{۲}$$

https://konkur.info

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور
WWW.KONKUR.INFO
Konkur.info
https://konkur.info