

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

مشتق تابع در یک نقطه:

تعریف: مشتق تابع f در $x=a$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (I) \quad \text{یا} \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad (II)$$

مثال: به کمک تعریف مشتق توابع زیر را در نقاط مذکور حساب کنید

الف) $f(u) = 2u + v$ $u=2$

$$f'(2) = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - f(2)}{u-2} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{2u + v - 4}{u-2} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{2(u-2) + v - 4 + 4}{u-2} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{2(u-2) + v - 4 + 4}{u-2} = 2$$

ب) $f(u) = u^2 + 3u$ $u=1$

$$f'(1) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 + 3u - 4}{u-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u+4)}{u-1} = 4$$

ج) $f(u) = 2^u + 5u$ $u=2$

$$f'(2) = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - f(2)}{u-2} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{2^u + 5u - 14}{u-2} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(u-2)(2^u + 2u + 1)}{u-2} = 14$$

$$\frac{2^u + 5u - 14}{u-2} \Big|_{x=2} \frac{x-2}{2^x + 5x + 1}$$

د) $f(x) = \sqrt{x}$ $x=1$

$$f'(1) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u) - f(1)}{u-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt{u} - 1}{u-1} \times \frac{\sqrt{u} + 1}{\sqrt{u} + 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u-1}{(u-1)(\sqrt{u} + 1)} = \frac{1}{2}$$

ه) $f(u) = \sqrt[3]{u}$ $u=1$

$$f'(1) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u) - f(1)}{u-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{u} - 1}{u-1} \times \frac{\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{u} + 1}{\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{u} + 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)}{(u-1)(\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{u} + 1)} = \frac{1}{3}$$

و) $f(u) = x(u-1)(u-2) \dots (u-10)$ $x=0$

$$f'(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u-0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{x(u-1)(u-2) \dots (u-10)}{u} = x$$

مثال: با استفاده از تعریف، به دو روش مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $x=3$ بدست آورید.

روش اول:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x(x-3)}}{x-3} = \frac{-1}{9}$$

(صورت و مخرج کسر را در $x=3$ ضرب می‌کنیم.)

روش دوم:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{3h(3+h)} = \frac{-1}{9}$$

مشتق یک طرفه

تعریف: مشتق یک طرفه تابع f در $x=a$ از روابط زیر بدست می‌آید:

الف) مشتق چپ در $x=a$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{یا} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ب) مشتق راست در $x=a$

به طور کلی به مشتق چپ و راست f در $x=a$ را با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهیم.

نکته: شرط وجود مشتق تابع f در a این است که مشتق چپ و راست f در a موجود و برابر باشد.

مثال

1) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x|$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow f$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست (چون $f'_+(0) = 1$ و $f'_-(0) = -1$)

۱۲) مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 3 \\ 4x-9 & ; x \geq 3 \end{cases}$ را در $x=3$ بررسی کنید

$$f'_+(3) = \lim_{u \rightarrow 3^+} \frac{f(u) - f(3)}{u - 3} = \lim_{u \rightarrow 3^+} \frac{u^2 - 9}{u - 3} = \lim_{u \rightarrow 3^+} \frac{(u-3)(u+3)}{u-3} = 6$$

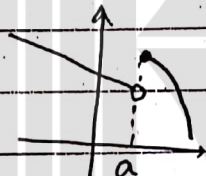
$$f'_-(3) = \lim_{u \rightarrow 3^-} \frac{f(u) - f(3)}{u - 3} = \lim_{u \rightarrow 3^-} \frac{4u - 9 - 9}{u - 3} = \lim_{u \rightarrow 3^-} \frac{4(u-3)}{u-3} = 4$$

$$f'_-(3) - f'_+(3) = 4 \xrightarrow[\text{است}]{\text{مشتق پذیر است}} f'(3) = 4$$

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه f در $x=a$ پیوسته نیز است.

تذکره: عکس قضیه فوق برقرار نیست، یعنی هر تابع پیوسته لزوماً مشتق پذیر نیست. به طور مثال $y = |x|$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

تذکره: قضیه فوق: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر نیست.



مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & ; x < 2 \\ 4x & ; x \geq 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید

$$\lim_{u \rightarrow 2^-} f(u) = (2)^2 + 5 = 9$$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow 2^-} f(u) \neq f(2)$$

$$\lim_{u \rightarrow 2^+} f(u) = f(2) = 8$$

در نتیجه f در $x=2$ پیوسته است در نتیجه مشتق پذیر نیست.

تابع مشتق (ضابطه مشتق)

مشتق تابع f در هر نقطه از بازه I (به شرط مشتق پذیری) از فرمول زیر بدست می آید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{اگر } a, \text{ به } x \text{ تبدیل می کنیم})$$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید:

الف) $f(u) = \sqrt{u} - 5$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - 5 - \sqrt{x} + 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب) $f(u) = x^r + 5x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^r + 5(x+h) - x^r - 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^r + r x^{r-1} h + \dots + 5x + 5h - x^r - 5x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r x^{r-1} h + 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (r x^{r-1} + 5) = r x^{r-1} + 5$$

ج) $f(u) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h x(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

د) $f(u) = r x^r$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x+h)^r - r x^r}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x^r + r x^{r-1} h + \dots + h^r) - r x^r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r x^{r-1} h + \dots + r h^r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (r x^{r-1} + \dots + r h^{r-1}) = r x^{r-1}$$

Subject:.....

Date:.....

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^r - a^r}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x^{r-1} - a^{r-1})}{x - a}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x-a)(x^{r-2} + ax^{r-3} + \dots + a^{r-2})}{(x-a)} = x a^{r-1}$$

x, a اور x سے x کو کم :

$$f'(a) = x a^{r-1} \Rightarrow f'(x) = r x^{r-1}$$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2})} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info