

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

ریاضی ۳ - جمله اول

تابع چند جمله‌ای: تابع f با ضابطه $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + e$ که

در آن $n \in \mathbb{N}$ را می‌توانیم چند جمله‌ای آگوست که دامنه آن برابر \mathbb{R} است:

$$D_f = \mathbb{R}$$

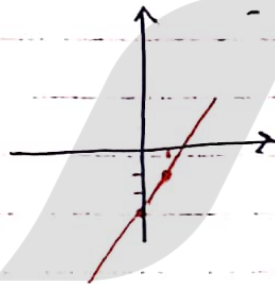
مثال: تابع $f(x) = x^3 - 4x + 1$ یک چند جمله‌ای از درجه ۳ می‌باشد.

در این قسمت به یاد آوری رسم نمودار توابع درجه اول و درجه ۲ می‌پردازیم

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $f(x) = 2x - 3$

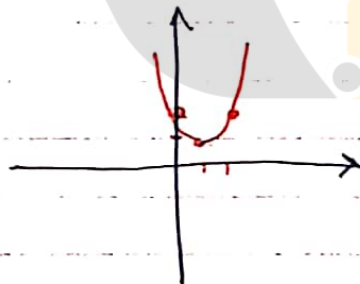
x	y
0	-3
1	-1



ب) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2(1)} = 1 \quad \text{طول رأس}$$

x	y
0	2
1	1
2	2

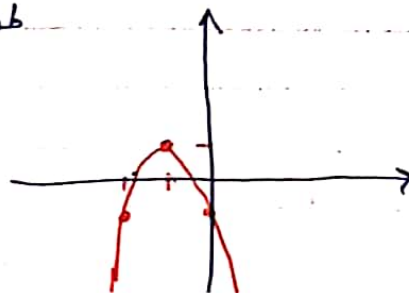


ج) $f(x) = -2(x+1)^2 + 1$

= 0 پار عبارت تواندار

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{طول رأس}$$

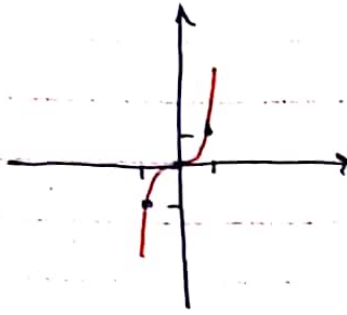
x	y
0	-1
-1	1
-2	-1



رسم نمودار $y = x^3$ و $y = -x^3$

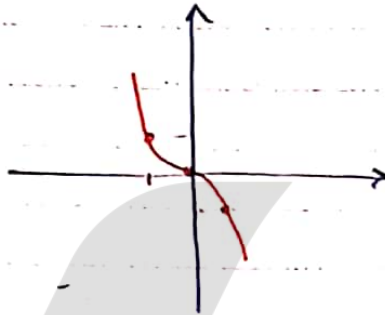
الف) $y = x^3$

x	y
1	1
0	0
-1	-1



ب) $y = -x^3$

x	y
1	-1
0	0
-1	1



نکته: با توجه به نمودار توابع فوق می‌توان نمودار تابع $y_1 + y_2 = -(x-x_1)^3 + y_1$ و $y_1 = (x-x_1)^3 + y_1$ را به کمک انتقال رسم کرد. اما از الگوی زیر به کمک ترسیم

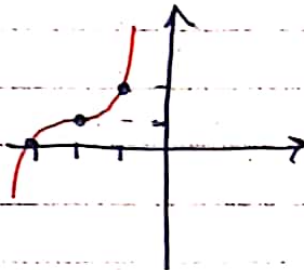
در معادله جواب چند نقطه دکان بدست می‌آوریم \Rightarrow چاره عبارت تواندار

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $y = (x+2)^3 + 1$

چاره عبارت تواندار $= 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

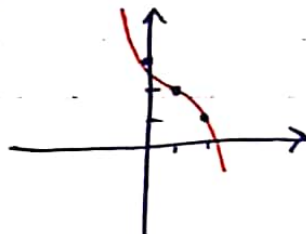
x	y
-1	2
-2	1
-3	0



ب) $y = -(x-1)^3 + 2$

چاره عبارت تواندار $= 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	y
2	1
1	2
0	3



نکته: در نمودار $y = a(x-x_1)^2 + y_1$ نقطه $A(x_1, y_1)$ نقطه عطف (مركز تعادل) تابع است

مثال: در تابع $f(x) = (x+2)^2 - 5$ مركز تعادل را بدست آورید

پایه عبارت تواندار $\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$f(-2) = -5 \Rightarrow A(-2, -5)$ **مركز تعادل**

توابع گنیوا (صغور یا زدی)

تعریف: تابع f در یک بازه مابعد I که $I \subseteq D_f$ ، **صغور** (صغور آینه) است

گوئیم **فرگه** به از آن $x_1, x_2 \in I$ که $x_1 < x_2$ اگر $f(x_1) < f(x_2)$ **صغور**

$f(x_1) < f(x_2)$ **صغور آینه**

به عبارت دیگر با افزایش x ما، مقادیر y افزایش یا کاهت عابده (افزایش یا کاهت)



نکته: هر تابع که در یک بازه **آینه صغور** باشد، **صغور** نیز هست، و اگر تابعی

در دامنه اش **صغور** (صغور آینه) باشد به آن تابع **تابع صغور** (صغور آینه) گوئیم

مثال: نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ را رسم کنید و تعیین کنید این تابع در

چه بازه آ **آینه صغوری** است؟

حل: تابع درجه دو (سهی) است $x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(1)} = -1$

x	y
0	3
-1	2
-2	3

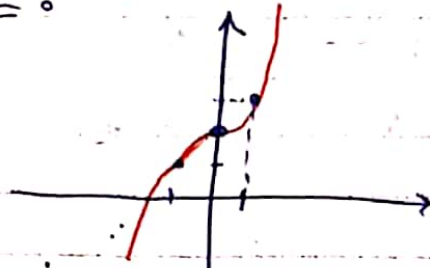


تابع در بازه $(-1, +\infty)$ **آینه صغور** است

مثال: نشان دهید تابع $f(x) = x^3 + 2$ اکیداً صعودی است.

حل: تابع درجه ۳ است. $x=0 \Rightarrow = 0$ پایه عبارت تواندار

x	y
3	27
2	8
1	1



چون تابع f در دامنه اش یعنی \mathbb{R} با افزایش x مقدار y نیز افزایش می یابد. لذا اکیداً صعودی است پس به آن تابع اکیداً صعودی گوئیم.

۱۲. تابع نزولی (نزولی اکید) تعریف: تابع f را در بازه I که $I \subseteq D_f$ نزولی (نزولی اکید) گوئیم

هرگاه با افزایش x مقدار y کاهش یابد یا ثابت بماند (کاهش یابد)

به عبارت دیگر بازه I از $x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2$ اگر $f(x_1) \geq f(x_2)$ (نزولی)
 $f(x_1) > f(x_2)$ (نزولی اکید)



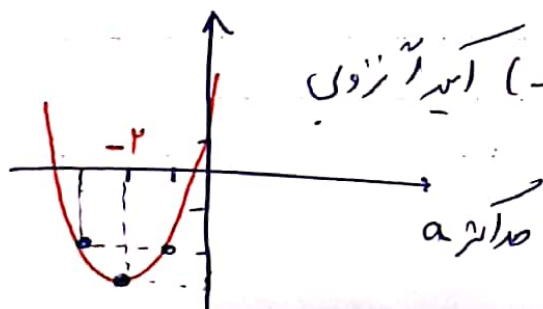
نکته: هر تابع که در بازه I اکیداً نزولی باشد، نزولی نیز هست و بالعکس. نزولی (نزولی اکید) گوئیم که در دامنه اش نزولی (نزولی اکید) باشد.

مثال: تابع $f(x) = x^2 + 4x + 1$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است بزرگترین

مقدار a را بدست آورید. حل: عموداً تابع را رسم می کنیم.

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

x	y
-1	-2
-2	-3
-3	-2



تابع در بازه $(-\infty, -2]$ اکیداً نزولی

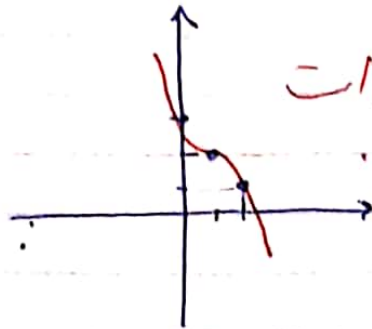
است لذا

$$a = -2$$

سؤال: نشان دهید تابع $f(u) = -(u-1)^2 + 2$ ابتدا نزولی است.
 حل: ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم

پایه عبارت تواندار $= 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow u=1$

x	y
2	1
1	2
0	2
-1	1



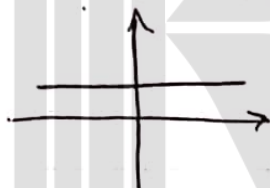
تابع در دامنه اش ابتدا نزولی است
 لذا آنرا تابع ابتدا نزولی گویند.

کلمات قابل توجه
 ① مرتاب خطی ابتدا صعودی یا ابتدا نزولی است.

② مرتاب صعودی یا نزولی را گویا توکم.

③ مرتاب صعودی ابتدا یا نزولی ابتدا را گویای ابتدا توکم.

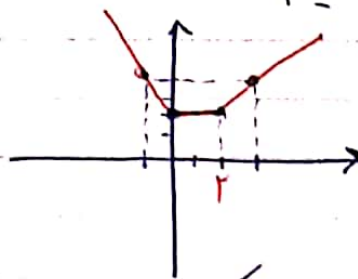
④ تابع ثابت، هم صعود و هم نزولی است.



سؤال: نمودار تابع $f(u) = \begin{cases} -2u+2 & u \leq 0 \\ 2 & 0 < u < 2 \\ 2u-2 & u \geq 2 \end{cases}$ را رسم کنید سپس تعیین کنید
 تابع مذکور در هر بازه u صعودی، صعودی، نزولی، نزولی است یا ثابت است؟

حل: چون ضابطه‌ها خطی است لذا کافی است برآسم هر قسمت دو نقطه دلخواه بدست آوریم و با از نقاط زیر استفاده کنیم.

x	y
-1	4
0	2
2	2
+3	4



صعود: $[0, +\infty)$

نزولی: $(-\infty, 2]$

ثابت: $[0, 2]$

صعودی: $[2, +\infty)$

نزولی: $(-\infty, 0]$

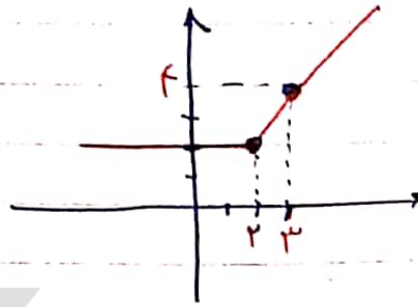
سؤال: نمودار تابع $f(x) = 2 + |x - 2|$ را رسم کنید و نشان دهید تابع f یکپارچه است.

حل: چون تابع قدر مطلق است لذا به کمک تعیین علامت f را به صورت هندسی می نویسیم

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-		+
$ x - 2 $	$-2 + 2$		$x - 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 2 \\ 2x - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$



تابع در دامنه اش صعودی است لذا یکپارچه است

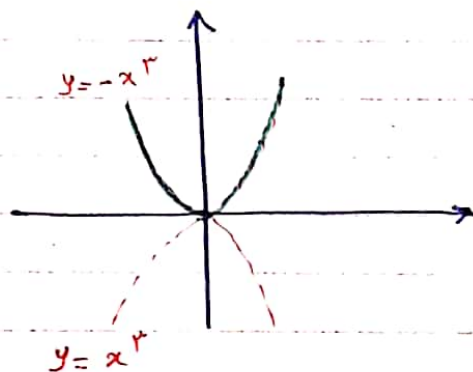
سؤال: نمودار تابع $y = x^2 |x|$ را رسم کنید آیا تابع مذکور آیه یکپارچه است؟ چرا؟

حل: ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم و تابع را به صورت هندسی ضابطه u می نویسیم

$$u = \begin{cases} \text{داخل قدر مطلق} \\ u = 0 \end{cases}$$

u	$-\infty$	0	$+\infty$
u	-		+
$ u $	$-x$		x

$$y = \begin{cases} -x^3 & ; x < 0 \\ x^3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$



خبر تابع در دامنه اش نه صعودی و نه نزولی است لذا یکپارچه نیست

ترکیب دو تابع
تعریف: به فرض f و g دو تابع با دامنه D_f و D_g باشد در این صورت ضابطه

ترکیب تابع f با g را به صورت $f \circ g$ نشان می‌دهیم و دامنه ترکیب دو تابع را با $D_{f \circ g}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

معنی در تابع f به جای x ما $g(x)$ قرار دهیم.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

یاد آوری انواع توابع به همراه دامنه

۱) **توابع چند جمله‌ای**: صورت کلی به فرم $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + e$ است و $D_f = \mathbb{R}$

مثال: توابع $f(x) = -2$ و $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ چند جمله‌ای اند لذا $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$

۲) **توابع گویا**: به عبارت تابع کسری به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ و مخرج آن چند جمله‌ای باشد تابع گویا گوئیم آن را f تابع گویا می‌نامند.
 $D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ را بدست آورید.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

۳) **توابع رادیکالی**: اگر تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ باشد دامنه تابع رادیکالی باشد

$$D_f = \{x \mid ax+b \geq 0\}$$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x-6}$ را تعیین کنید:

$$D_f = [3, +\infty) \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow 2x - 6 \geq 0$$

نکته: در دامنه ترکیب دو تابع یعنی $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ معمولاً بعد از جاگزینی باید اشتراک دو بازه را تعیین کنیم.

مثال

۱- بفرض $f(x) = 2x^2 - 3$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ در این صورت ضابطه توابع $f \circ g$ و

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x))^2 - 3$$

$$= 2(\sqrt{2-x})^2 - 3 = 2(2-x) - 3 = -2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2 - (2x^2 - 3)} = \sqrt{5 - 2x^2}$$

۲- بفرض $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = 3x - 2$ در این صورت موارد زیر را حل کنید
 حل: ابتدا باید ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را بدست آورده پس از یکدیگر مساوی کنیم.

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(3x - 2) - 2 = 6x - 6 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(2x - 2) - 2 = 6x - 8 \end{cases}$$

از رابطه (I)، (II) و فرض داریم:

$$(6x - 6) - (6x - 8) = x^2 \Rightarrow -x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm 2$$

۳- بفرض $f = \{(2, 5), (5, 2), (5, -1), (2, 0)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, -1), (2, 0), (5, 7)\}$ باشد در این صورت ضابطه توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ ، $f \circ f$ و $g \circ g$ را در صورت امکان بدست آورید.
 حل: برای بدست آوردن ضابطه $f \circ g$ از لغت دامنه g شروع می‌کنیم:

تعریف نشده $(f \circ g)(3) = f(g(3))$ ، تعریف نشده $(f \circ g)(1) = f(g(1))$

تعریف نشده $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = -1$ ، $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = -1$ لذا $f \circ g = \{(2, -1)\}$

و به طور مشابه $g \circ f = \{(5, 0), (3, 7)\}$

زیرا:

$$\begin{cases} (g \circ f)(5) = g(f(5)) = 0 \\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = 7 \\ (g \circ f)(0) = g(f(0)) = \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

۳) $f \circ f = \{(3, 2)\}$

تعریف نشده $(f \circ f)(0) = f(f(0))$
 تعریف نشده $(f \circ f)(5) = f(f(5))$
 $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = 2$

۴) $g \circ g = \{(1, 0)\}$

۴- بفرض $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & ; x < 1 \\ 5x + 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ در این صورت

الف) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 5(3) + 1 = 16$ مطلوبت معادله

ب) $(f \circ f)(-3) = f(f(-3)) = f(17) + 1 = 86$

ج) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = \sqrt{4(1)+1} = \sqrt{5}$

۵- بفرض $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = x^2 + 1$ در این صورت ضابطه و دامنه تابع $g \circ f$ را تعیین کنید.

ضابطه: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{1-x})^2 + 1 = 1 - x + 1 = 2 - x$ معادله $g \circ f$ ؟

دامنه f : $1 - x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$
 دامنه g : \mathbb{R}

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x < 1 \mid \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1]$ برقرار

۶- اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ باشد دامنه و ضابطه تابع $f \circ g$ را

ضابطه: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2x}{3-x}$ معادله دامنه $f \circ g$ ؟

دامنه f : $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
 دامنه g : $x \neq 0$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{3}{x} \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$ $x \neq 3$

۷- اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد دامنه و ضابطه $f \circ g$ را بدست آورید.

ضابطه $f \circ g$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$

دامنه f : $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
 دامنه g : \mathbb{R}

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{u \in \mathbb{R} \mid 2u^2 - 1 \geq 1\}$$

$$= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

حل ساده: $2u^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow 2u^2 - 2 \geq 0$

$$2u^2 - 2 = 0 \Rightarrow u = \pm 1$$

u	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$2u^2 - 2$		+	-	+
		ج.	ز.	ز.

۸- بفرض $f(x) = 3x - 4$ و $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 14$ در این صورت ضابطه g تابع f را بدست آورید.

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = 3g(u) - 4$$

طبق فرض و مطلب فوق داریم:

$$3g(u) - 4 = 3u^2 - 6u + 14 \Rightarrow 3g(u) = 3u^2 - 6u + 18$$

$$\Rightarrow g(u) = \frac{3u^2 - 6u + 18}{3} = u^2 - 2u + 6$$

۹- بفرض $f(u) = 2u - 5$ و $g(x) = x^2 - 3x + 11$ در این صورت معادله ذیل را حل کنید

$$(f \circ g)(u) = 7$$

حل: ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را بدست می آوریم:

$$(f \circ g)(u) = f(g(x)) = 2(x^2 - 3x + 11) - 5 = 2u^2 - 6x + 11$$

طبق فرض: $(f \circ g)(u) = 7 \Rightarrow 2u^2 - 6u + 11 = 7$

$$2u^2 - 6u + 4 = 0 \Rightarrow (2u - 2)(2u - 4) = 0$$

$$\begin{cases} 2u - 2 = 0 \Rightarrow u = 1 \\ 2u - 4 = 0 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$$

۱۰- بفرض $g(u) = 2u - 1$ و $(f \circ g)(u) = 7u + 7$ باشد در این صورت ضابطه f تابع f را بدست آورید.

$$f(g(x)) = 7u + 7 \quad (I)$$

$$g(x) = 2u - 1 \Rightarrow x = \frac{g(x) + 1}{2} \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow f(g(x)) = 7x \left(\frac{g(x) + 1}{2} \right) + 7 = 3g(x) + 10$$

$$f(g(x)) = 3g(x) - 10 \Rightarrow f(x) = 3x - 10$$

تبدیل نمودارها

فرض نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده باشد برای رسم نمودار تابع

$$y = a f(bx+c) + d$$

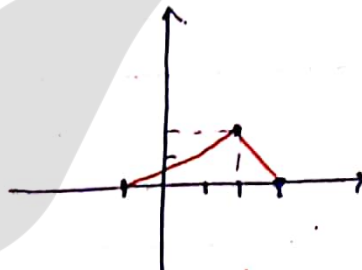
کافی است به $bx+c$ مقادیر خاص (ابتداء و انتهای نمودار، نقاط ماکزیمم و مینیمم) از مقادیر دامنه f را داده و از روی آن مقادیر x و y را تعیین کنیم

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است با توجه به آن نمودار توابع مذکور را رسم کنید



الف) $y = f(x-2)$

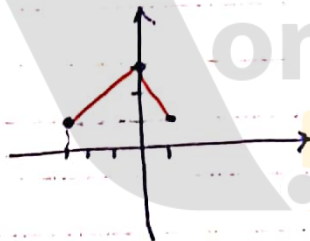
x	$x-2$	y
-1	-3	0
2	0	2
3	1	0



انتقال نمودار دو واحد به راست

ب) $y = f(x) + 1$

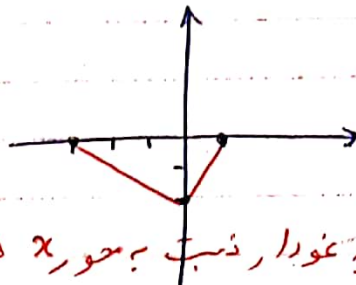
x	y
-2	1
0	3
1	1



انتقال نمودار یک واحد به بالا

ج) $y = -f(x)$

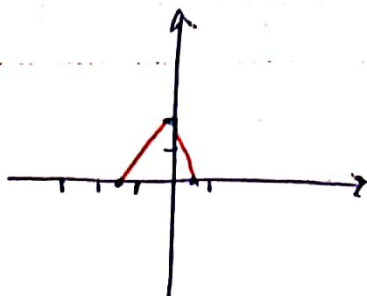
x	y
-2	0
0	-2
1	0



قرینه نمودار نسبت به محور x ها

د) $y = f(2x)$

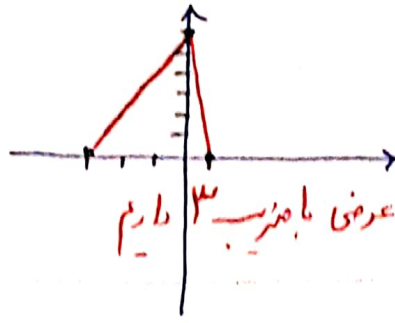
x	$2x$	y
$-\frac{3}{2}$	-3	0
$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{3}{2}$	3	0



انقباض طولی با ضریب $\frac{1}{2}$

ا) $y = 3f(x)$

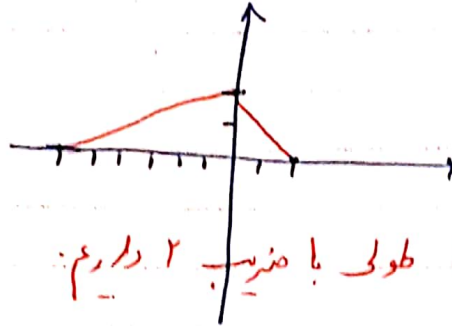
x	y
-3	0
0	4
1	0



انبساط عرضی با ضریب ۳ داریم

ب) $y = f(\frac{x}{2})$

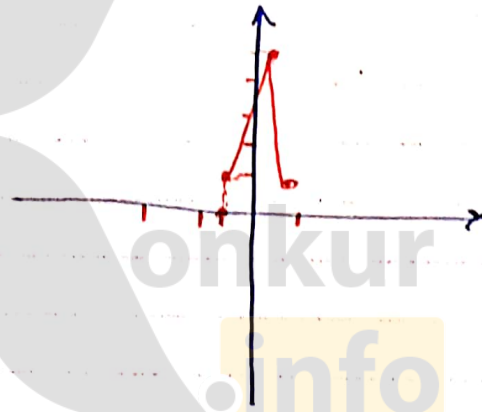
x	y
-6	0
0	2
2	0



انبساط طولی با ضریب ۲ داریم

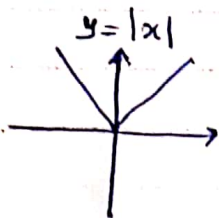
ج) $y = 2f(3x-1) + 1$

x	3x-1	y
-5/3	-3	1
-1/3	0	5
1/3	1	1

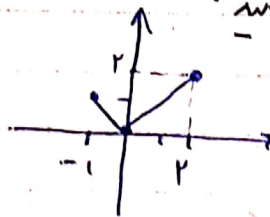


$$\begin{cases} 3x-1 = -3 \rightarrow x = -\frac{5}{3} \\ 3x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 3x-1 = 1 \rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

سوال: نمودار $f(x) = |x|$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید سپس با استفاده از آن نمودار

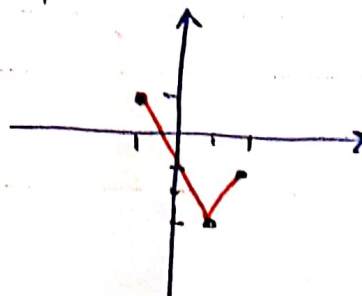


در بازه $[-1, 2]$



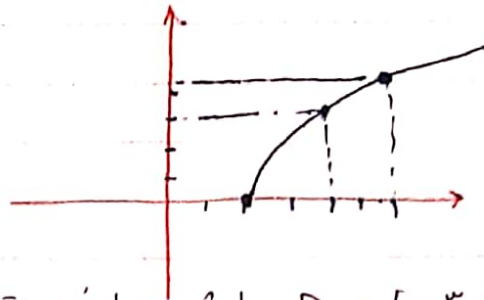
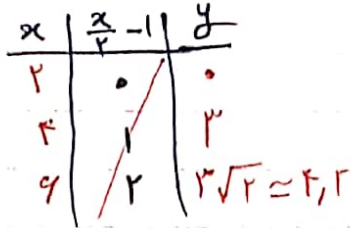
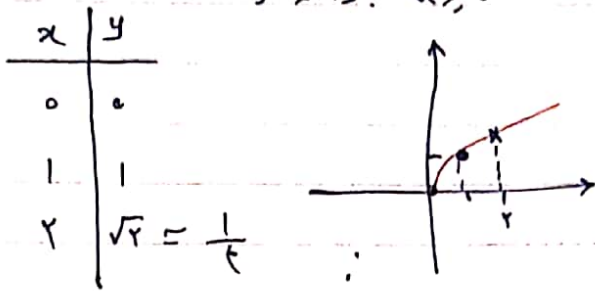
تابع $g(x) = 2f(-x+1) - 3$ را رسم کنید

x	-x+1	y
2	-1	1
1	0	3
-1	2	1



چند مثال از تبدیل نمودارها

۱) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید پس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = 3f\left(\frac{x}{4} - 1\right)$ را رسم کنید



۲) فرض $D_f = [-3, 2]$ باشد در این صورت دامنه تابع $g(x) = 2f(2x-1) + 3$ را

$$-3 \leq 2x-1 \leq 2 \xrightarrow{+1} -2 \leq 2x \leq 3 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_g = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$$

۳) در مثال قبلی اگر $R_f = (-1, 5)$ باشد بردار تابع g را بدست آورید.

$$-1 < f(2x-1) < 5 \xrightarrow{\times 2} -2 < 2f(2x-1) < 10$$

$$\xrightarrow{+3} 1 < 2f(2x-1) + 3 < 13 \Rightarrow -1 < g(x) < 13$$

در نتیجه $R_g = (-1, 13)$

۴) در تابع $g(x) = -2f\left(\frac{x}{3} + 1\right) + 5$ اگر $D_g = [-1, 3]$ و $R_g = [0, 5]$ در این

صورت D_f و R_f را بدست آورید.

$$-1 < x \leq 3 \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < \frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{+1} \frac{2}{3} < \frac{x}{3} + 1 \leq 2 \Rightarrow D_f = \left(\frac{2}{3}, 2\right]$$

$$R_g = [0, 5] \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq -2f\left(\frac{x}{3} + 1\right) + 5 < 5$$

$$\xrightarrow{-5} -5 \leq -2f\left(\frac{x}{3} + 1\right) \leq 0$$

$$\xrightarrow{\div (-2)} \frac{5}{2} \geq f\left(\frac{x}{3} + 1\right) \geq 0 \Rightarrow R_f = \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

وارون تابع

تعریف: بیض f یک تابع f^{-1} (یک به یک) در این صورت تابع f را وارون f^{-1} گوئیم هرگاه:

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

مثال: بیض $f(x) = 3x - 4$ نشان دهید تابع $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون تابع f است.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x + 4 - 4 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{3x - 4 + 4}{3} = x$$

لذا تابع f وارون تابع f است.

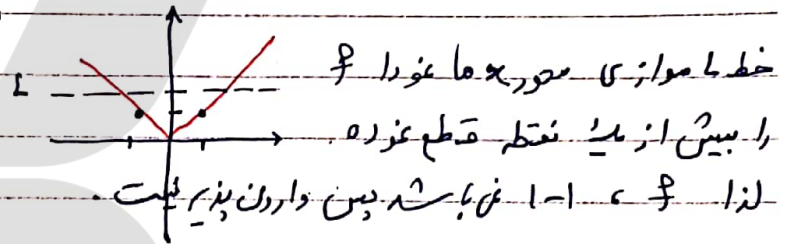
نکات قابل توجه

۱) عبارته تابع f^{-1} فقط وارون پذیرند و وارون تابع f را در صورت وجود با f^{-1} نشان می دهند.

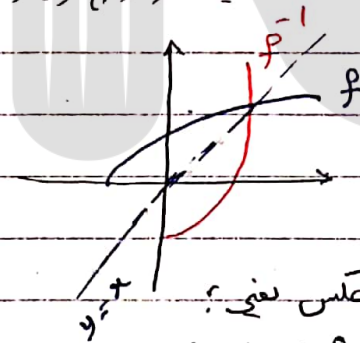
مثال: وارون پذیر تابع $f(x) = |x|$ را بررسی کنید.

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ داخل قدر مطلق}$$

x	y
1	1
0	0
-1	1



۲) عبارته نمودار f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نسبت به ربع اول و سوم) متقارن اند.



۳) اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b) = a$ و برعکس یعنی:

$$(a, b) \in f \iff (b, a) \in f^{-1}$$

مثال: بیض $f(x) = (1, 2) \cup (3, 5) \cup (7, 8)$ را در این صورت حاصل عبارت

$$f^{-1}(2) + f^{-1}(8)$$

$$\text{حاصل عبارت} = -2 + 7 = 5$$

مثال: بیض $f(x) = 3x - 4$ در این صورت حاصل عبارت $f^{-1}(2) + 4$ را به از $x = 2$ بیست آورید.

$$y = 3f^{-1}(2) + 4 = 3(2) + 4 = 10$$

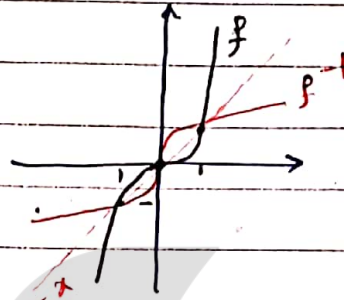
۱۴ شماره $D_f = R_f - 1$ و $R_f = D_f - 1$

۱۵ برای بدست آوردن واردين f ابتدا x را بر حسب y بدست آورده سپس جايي x و y را عوض مي كنيم.

مثال: نشان دهيد تابع $f(x) = x^3$ واردين پذير است پس ضابطه واردين f را بدست آورده و نمودار آن را رسم كنيد.
 حل: ابتدا نمودار f را رسم مي كنيم

با برعكس شدن $x=0 \Rightarrow y=0$ با برعكس شدن

x	y
-1	-1
0	0
1	1



مقابل واردين f !

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \xrightarrow{\text{جاي } x \text{ و } y \text{ عوض}} y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

نکته: بعض از توابع در دامنه خود ۱-۱ نغز يا بسند لذا با محدود کردن دامنه هاي تابع ۱-۱ ساخته تا بتوان واردين آن را مقابل كنيم (با تاخين واردين پذير است).

حذ مثال

۱) بفرض $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = 3x + 5$ در اين صورت حاصل $(g^{-1} \circ f^{-1})(11)$ را بدست آوريد.

$(g^{-1} \circ f^{-1})(11) = g^{-1}(f^{-1}(11)) = g^{-1}(2) = -1$

$f^{-1}(11) = x \Rightarrow f(x) = 11 \Rightarrow 2x - 3 = 11 \Rightarrow x = 2$

$g^{-1}(2) = x \Rightarrow g(x) = 2 \Rightarrow 3x + 5 = 2 \Rightarrow x = -1$

راه دوم: به سادگي ثابت مي شود $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ در نتيجه

$(g^{-1} \circ f^{-1})(11) = (f \circ g)^{-1}(11) = -1$

زيرا؟

$(f \circ g)^{-1}(11) = x \Rightarrow (f \circ g)(x) = 11 \Rightarrow 2(3x + 5) - 3 = 11 \Rightarrow x = -1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(3x + 5) - 3 = 6x + 7$

۲- بفرض $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^2$ در این صورت حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $(f \circ g)^{-1}(5) \stackrel{(*)}{=} 4$

$$(f \circ g)^{-1}(5) = x \Rightarrow (f \circ g)(x) = 5 \Rightarrow f(g(x)) = 5$$

$$\frac{1}{8}x^2 - 3 = 5 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 4 \quad (*)$$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(5) = (f \circ g)^{-1}(5) \stackrel{الف)}{=} 4$

ج) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6) = (f \circ f)^{-1}(6) \stackrel{(*)}{=} 40$

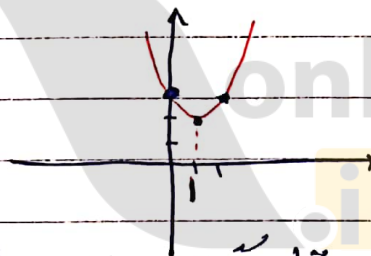
$$(f \circ f)^{-1}(6) = x \Rightarrow (f \circ f)(x) = 6 \Rightarrow f(f(x)) = 6$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{8}x - 3 \right) - 3 = 6 \xrightarrow{(*)} \frac{1}{8}x - 27 = 48 \Rightarrow x = 40 \quad (*)$$

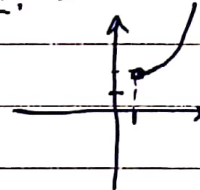
۳- دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را طوری محدود کنید که تابع ۱-۱ اثر در سپس در دامنه جدید وارون آزا بدست آورید.
حل: ابتدا نمودار f را رسم کنید؟

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2(1)} = 1 \quad \text{طول رأس}$$

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline +1 & 2 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{array}$$



اثر $D_f = [1, +\infty)$ را در نظر بگیریم در نتیجه f ، ۱-۱ لذا وارون نیز خواهد بود



معادله وارون f در دامنه جدید؟

$$y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x = y - 3 \xrightarrow{+1} (x-1)^2 = y-2$$

$$\xrightarrow{+} |x-1| = \sqrt{y-2} \Rightarrow x-1 = \sqrt{y-2}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{y-2} \xrightarrow{y \text{ عوض } x} y = 1 + \sqrt{x-2}$$

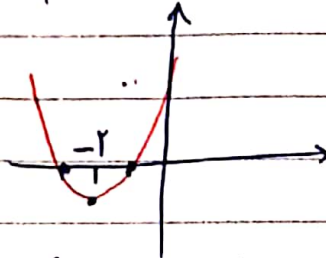
$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2} \quad \text{لذا}$$

۱۴ تابع $g(x) = x^2 + 4x + 3$ مفروضات با محدود کردن دامنه و
 کلاس ۱-۱ و در نتیجه وارون پذیر بس زیر پس ضابطه وارون را بدست
 آوریم.

حل: ابتدا نمودار g را رسم می کنیم:

طول رأس $x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$

x	y
-1	0
-2	-1
-3	0



اگر $D_g = [-2, +\infty)$ در نظر بگیریم g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر خواهد بود
 مناسب ضابطه وارون g^{-1} :

$$y = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x^2 + 4x = y - 3$$

طبق رابطه (۱) به طرفین ۴ واحد اضافه می کنیم

$$x^2 + 4x + 4 = y - 2 + 4 \Rightarrow (x+2)^2 = y+2 \xrightarrow{\pm} |x+2| = \sqrt{y+2}$$

$$\Rightarrow x+2 = \sqrt{y+2} \Rightarrow x = -2 + \sqrt{y+2}$$

با x جای y و بالعکس
 $y = -2 + \sqrt{x+2}$

$b = 4 \Rightarrow \begin{matrix} \text{بتران} \\ 2 \\ \text{در} \end{matrix} \Rightarrow 4 \text{ (*)}$

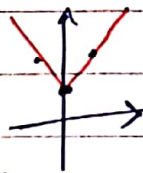
$$\Rightarrow g^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x+2}$$

۴- با محدود کردن تابع $f(x) = |x| + 1$ کلاس ۱-۱ بس زیر و در دامنه جدید
 ضابطه وارون آن را مناسب کنیم.

حل: ابتدا نمودار f را رسم می کنیم:

دifferencه $= 0 \Rightarrow x = 0$

x	y
0	1
1	2
-1	2



اگر $D_f = [0, +\infty)$ باشد f ۱-۱ در نتیجه وارون پذیر است

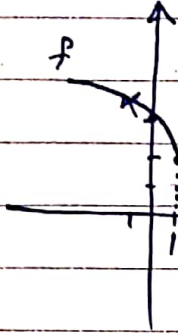
$$f(x) = |x| + 1 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y} y = x - 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$$

۶- نشان دهد $f(x) = 2 + \sqrt{1-x}$ وارون پذیر است سپس وارون f^{-1} را تعیین کرده و f^{-1} را در دستگاه مختصات f^{-1} کتبه
 حل: ابتدا نمودار تابع f را رسم می کنیم:

نامنه: $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

x	y
1	2
0	3
-1	$2 + \sqrt{2} = 3.414$



چون فقط مولفه معرر x ما نمودار f را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند لذا f^{-1} وارون پذیر است.

و در نهایت ضابطه وارون f^{-1} را حساب می کنیم:

$$y = 2 + \sqrt{1-x} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{1-x} \xrightarrow{\text{توان دو}} (y-2)^2 = 1-x$$

$$\Rightarrow x = 1 - (y-2)^2 \xrightarrow{\text{تایید و عوض}} y = 1 - (x-2)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - (x-2)^2 \quad ; \quad D_{f^{-1}} = R_f = [2, +\infty)$$

۷- غرض $f(x) = 5 + \sqrt{2x-6}$ در این صورت دامنه و بردار تابع f^{-1} را بدست آورید.

حل: $\sqrt{2x-6} \geq 0 \xrightarrow{+5} 5 + \sqrt{2x-6} \geq 5 \Rightarrow f(x) \geq 5$
 $\Rightarrow R_f = [5, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [5, +\infty)$

دامنه: $2x-6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \xrightarrow{\div 2} x \geq 3$
 $\Rightarrow D_f = [3, +\infty) \Rightarrow R_{f^{-1}} = D_f = [3, +\infty)$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info