

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

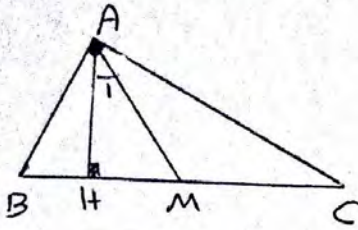
WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

فصل ۳

روابط طولی در مثلث:

۱) روابط طولی در مثلث قائم الزویه:



۱) $AH^2 = BH \cdot CH$

۲) $AB^2 = BH \cdot BC$

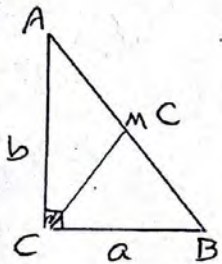
۳) $AC^2 = CH \cdot BC$

۴) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

۵) $AM = \frac{BC}{2}$

۶) $\hat{A}_1 = |\hat{B} - \hat{C}|$

مثال ۱: در مثلث قائم الزویه ای به مساحت $4\sqrt{3}$ ، نسبت اضلاع قائم به $\sqrt{3}$ است. طول میانه وارد بر وتر در این مثلث چقدر است؟



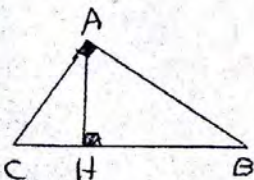
$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow a = \sqrt{3}b$

$S = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}b + b}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}b^2}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 14 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{14}}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{1}b = \frac{\sqrt{3}}{1} \times \sqrt{14} \Rightarrow \boxed{a = 9}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 14^2 = 81 + 196 = 277 \Rightarrow \boxed{c = 17}$ $CM = \frac{AB}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$

مثال ۲: در مثلث قائم الزویه روبرو $BH = 12$ و $CH = 4$ است. محیط و مساحت مثلث ABC را بیابید.



$AH^2 = BH \cdot CH = 12 \times 4 = 48 \Rightarrow AH = 4\sqrt{3}$

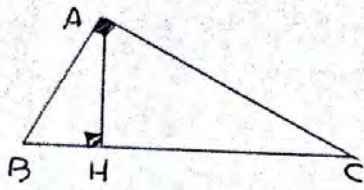
$BC = BH + CH = 12 + 4 = 16$

$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 16 \times 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$

$AC^2 = CH \cdot BC = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow AC = 8$

$AB^2 = BH \cdot BC = 12 \times 16 = 192 \Rightarrow AB = 8\sqrt{3}$ } $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3} + 1 = 1(\sqrt{3} + 1)$

مثال ۳: در مثل قائم الزویه روبرو آبر $AC=8$ و $BC=10$ باشد طول با CH و BH چقدر است؟

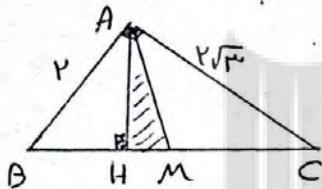


$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow \boxed{AB=6}$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 36 = BH \times 10 \Rightarrow BH = 3,6$$

$$CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4$$

مثال ۴: در مثل قائم الزویه ABC طول اضلاع قائم 2 و $2\sqrt{3}$ است. مساحت مثل AMH چقدر است؟ (AM میانه وارد بر وتر است)



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow BC = 4$$

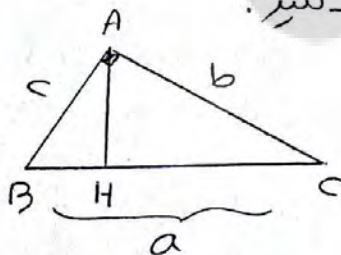
$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\triangle ABC: AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH \times 4 = 2 \times 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{AH = \sqrt{3}}$$

$$\triangle AHM: MH^2 + AH^2 = AM^2 \Rightarrow MH^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2 \Rightarrow MH^2 = 1 \Rightarrow \boxed{MH = 1}$$

$$S_{\triangle AHM} = \frac{1}{2} \times MH \times AH = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

قضیه: در مثل قائم الزویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ ثابت کن.



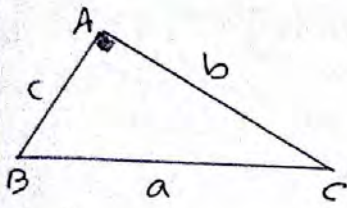
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AH \cdot BC \\ S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC = 2S$$

$$\Rightarrow AH^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot AC^2 \Rightarrow \frac{1}{AH^2 \cdot BC^2} = \frac{1}{AB^2 \cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

فصلیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت هر کدام از اضلاع به سینوس زاویه روبرویش برابر است با وتر مثلث:



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \quad \left| \begin{array}{l} \text{مضرب} \\ \text{هم} \end{array} \right.$$

اثبات: می دانیم در هر مثلث قائم الزاویه، سینوس هر زاویه حاده برابر است با نسبت ضلع مقابل بر وتر:

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = a \quad (1)$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{1} = a \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = a}$$

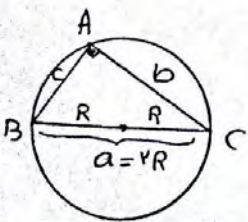
مسئله ۱: در مثلث قائم الزاویه ABC (A=90°) اگر tg B=√2، اندازه ضلع AB را بیابید.

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{tg } \hat{B} = \text{ctg } \hat{C} = \sqrt{2}$$

$$1 + \text{ctg } \hat{C} = \frac{1}{\sin \hat{C}} \Rightarrow 1 + (\sqrt{2}) = \frac{1}{\sin \hat{C}} \Rightarrow 3 = \frac{1}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \hat{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{حاده } \hat{C}} \sin \hat{C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \Rightarrow \frac{c}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow c = 3\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{c=3}$$

فصلیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبرو به آن ضلع برابر است با قطر دایره محیطی مثلث:



$$a = 2R$$

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = a \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R \quad (1)$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = a \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{1} = a = 2R \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R}$$

مثال) در مثلث قائم الزاویه $\hat{A} = 90^\circ$ شعاع دایره محیطی برابر R است ثابت کنید:

$$\frac{b^2}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} = 4$$

اثبات: $\frac{b^2}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} = \frac{b^2 + c^2}{R^2} = \frac{a^2}{R^2} = \frac{(2R)^2}{R^2} = \frac{4R^2}{R^2} = 4$

مثال) در یک مثلث قائم الزاویه، محیط دایره محیطی برابر 20π است اگر یکی از زاویه های حاده این مثلث 4° باشد مساحت مثلث را بیابید.

$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 4^\circ \Rightarrow \hat{C} = 86^\circ$$

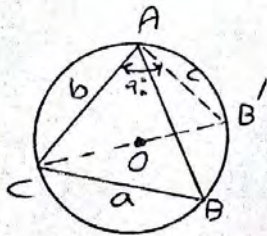
$$\text{محیط} = 20\pi \Rightarrow 2\pi R = 20\pi \Rightarrow R = 10$$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 4^\circ} = \frac{c}{\sin 86^\circ} = 20 \Rightarrow \begin{cases} b = 10\sqrt{3} \\ c = 10 \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 10 = 50\sqrt{3}$$

قضیه سینوس ها: در هر مثلث غیر مستقیم، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

$AB=c, AC=b, BC=a$	ضلع
$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$	هم



اثبات: دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول: مثلث ABC را با زاویه های حاده A و B و C

در نظر می گیریم. رأس C را به مرکز دایره محیطی

یعنی نقطه O وصل کرده و امتدادی دهیم تا زاویه را در B' قطع کند.

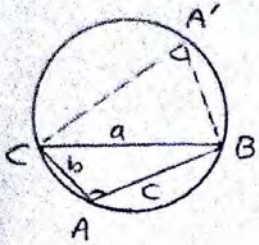
$$\left. \begin{aligned} \hat{B}' &= \widehat{AC} \\ \hat{B} &= \widehat{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \sin \hat{B} = \sin \hat{B}' \quad (1)$$

زاویه محاطی $B'AC$ روبرویه قطر است پس: $\hat{B}'AC = 90^\circ$

$$\text{قائم الزاویه } \hat{B}'AC: \sin \hat{B}' = \frac{b}{B'C} = \frac{b}{2R} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sin \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$$

بعین ترتیب با رسم قطرهای گذرنده از رأس‌های A و B ثابت می‌شود:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



حالت دوم: مثلث ABC را با فرض $\hat{A} > 90^\circ$ در نظر می‌گیریم:

نقطه A' را به طغیوه روی دایره محیطی مثلث ABC و در طرف دیگر رأس A در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مقابل } \hat{A} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \\ \text{مقابل } \hat{A}' = \frac{\widehat{BAC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

چون زاویه A منفرجه است پس \hat{A}' حاده خواهد بود از طرفین چون \hat{A} و \hat{A}'

مکمل اند پس سینوس آنها مساوی است یعنی: $\sin \hat{A} = \sin \hat{A}'$ (۱)

مثلث $A'BC$ دارای سه زاویه حاده است طبق قسمت الف داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}'} = 2R \xrightarrow{(1)} \frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

بعین ترتیب ثابت می‌شود:

مثال ۱: در مثلث ABC با فرض $b = 20$ و $\hat{B} = 30^\circ$ و $c = 20\sqrt{2}$ مطلوب است شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه‌های \hat{A} و \hat{C} :

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R \Rightarrow \frac{20}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 40 = 2R \Rightarrow \boxed{R = 20}$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{20\sqrt{2}}{\sin \hat{C}} = 40 \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 45^\circ \\ \hat{C} = 135^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \\ \hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ \end{cases}$$

مسئله ۲: در مثلثی $a=4$ و $b=4\sqrt{3}$ ، اندازه ضلع AB را بیابید.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} B=40^\circ \\ B=140^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) \Rightarrow \hat{C} = 110^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 140^\circ) \Rightarrow \hat{C} = 10^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C} = 110^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \cos 110^\circ \Rightarrow \boxed{c=12}$$

$$\hat{C} = 10^\circ = \hat{A} \Rightarrow \text{مساوی الساقین} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \Rightarrow c = a = 4$$

مسئله ۳: مساحت دایره محیطی مثلث ABC برابر 14π است. اگر $c=4\sqrt{3}$ و $b=4$ مطلوب است مقدار a (زاویه \hat{B} و \hat{C} هر دو حاده هستند).

$$S = \pi R^2 \Rightarrow 14\pi = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{R=4}$$

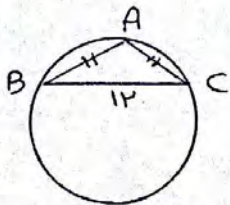
$$\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin B} = 8 \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\sin C} = 8 \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ \Rightarrow a = 2R \sin A = 8 \sin 110^\circ$$

مسئله ۴: طول قاعده مثلث متساوی الساقی 12 و شعاع دایره محیطی آن

$4\sqrt{3}$ است. طول ساق مثلث را بیابید.



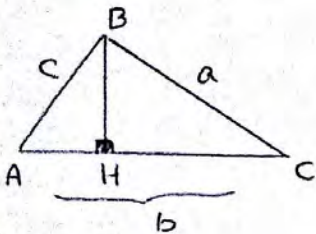
$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{12}{\sin A} = 2(4\sqrt{3}) \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 40^\circ \\ \hat{A} = 140^\circ \end{cases}$$

$$\hat{A} = 40^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 70^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 70^\circ} = 8\sqrt{3} \Rightarrow b = 8\sqrt{3} \sin 70^\circ = 12$$

$$\hat{A} = 140^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 20^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{\sin 20^\circ} = 8\sqrt{3} \Rightarrow b = 8\sqrt{3} \sin 20^\circ = 4\sqrt{3}$$

قضیه کسینوس ها :

در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصلضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها

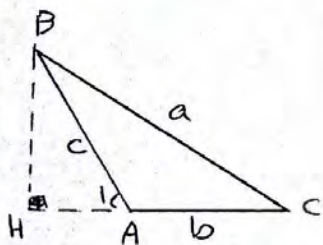


$AB=c, AC=b, BC=a$	ضلع
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$	مقابل
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$	
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$	

حالت اول : $\hat{A} < 90^\circ$
 $\cos \hat{A} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A}$
 $\sin \hat{A} = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin \hat{A}$

$\triangle BHC$: $a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - AH)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bAH + AH^2$
 $\Rightarrow a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2b(c \cdot \cos A) + c^2 \cos^2 A \Rightarrow a^2 = c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cdot \cos A$
 $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

همین ترتیب در رابطه بعدی اثبات می شود.

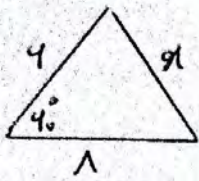


حالت دوم : $\hat{A} > 90^\circ$
 $\sin \hat{A}_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin \hat{A}_1$
 $\cos \hat{A}_1 = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A}_1$

$\triangle BHC$: $a^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \cdot \sin \hat{A}_1)^2 + (b + AH)^2$
 $\Rightarrow a^2 = c^2 \cdot \sin^2 \hat{A}_1 + b^2 + AH^2 + 2b \cdot AH \Rightarrow a^2 = c^2 \cdot \sin^2 \hat{A}_1 + b^2 + c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}_1 + 2b(c \cdot \cos \hat{A}_1)$
 $\Rightarrow a^2 = c^2 (\sin^2 \hat{A}_1 + \cos^2 \hat{A}_1) + b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A}_1$
 $\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2bc (-\cos A) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

همین ترتیب در رابطه دیگر اثبات می شوند.

حالت سوم : $\hat{A} = 90^\circ$ در این صورت قضیه کسینوس ها تبدیل به رابطه پیتاغورس می شود.



مثال ۱: مطلوب است معادله x :

$$x^2 = 4^2 + 1^2 - 2(4)(1) \cos 40^\circ = 17 - 8 \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 = 5^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

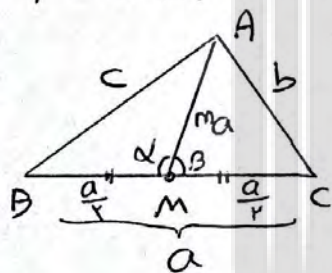
مثال ۲: طول اضلاع مثلثی $2\sqrt{2}$ و $4\sqrt{2}$ و $\sqrt{54}$ است. بزرگترین زاویه مثلث را بیابید.

$$(\sqrt{54})^2 = (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(4\sqrt{2}) \cos \theta$$

$$\Rightarrow 54 = 8 + 32 - 32 \cos \theta \Rightarrow 14 = -32 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \theta = 104^\circ$$

قضیه میاننده:

ثابت کنید در هر مثلث مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با مربع ضلع سوم به علاوه دو برابر مربع میانده وارد بر ضلع سوم:



ضلع	مربع
BC و M و $AM = m_a$	
$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$	
$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2m_b^2$	
$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m_c^2$	

$\triangle AMB$: $c^2 = (\frac{a}{2})^2 + m_a^2 - 2m_a \cdot (\frac{a}{2}) \cos \alpha \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a \cos \alpha$ (۱)

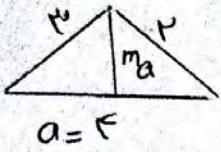
$\triangle ACM$: $b^2 = (\frac{a}{2})^2 + m_a^2 - 2m_a (\frac{a}{2}) \cos \beta \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a \cos \beta$ (۲)

(۱) + (۲) $\Rightarrow b^2 + c^2 = 2(\frac{a^2}{4}) + 2m_a^2 - am_a (\cos \alpha + \cos \beta)$

چون α, β مکمل هستند پس: $\cos \alpha = -\cos \beta \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$

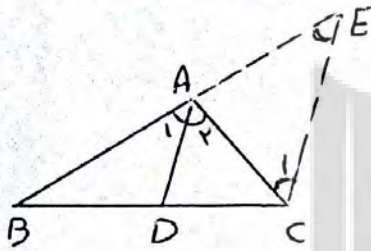
مثال) در مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ طول کوچکترین میانه را بیابید.
 حل: کوچکترین میانه به نزدیکترین ضلع واردی شود.



$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \Rightarrow 2^2 + 3^2 = \frac{4^2}{2} + 2m_a^2 \Rightarrow m_a = \frac{d}{2} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

قضیه نیسون داخلی:

ثابت کنید در هر مثلث، نیسون هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.



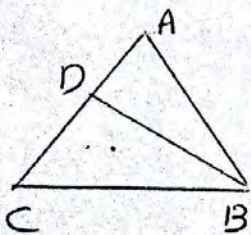
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$	منصف
$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$	معم

اثبات: از رأس C خطی موازی نیسون AD چنان رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطه E قطع کند، رابه E وصل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AD \parallel CE, AC \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \\ AD \parallel CE, AE \text{ مورب} &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{E} \end{aligned} \Rightarrow \triangle ACE \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow AE = AC$$

$$AD \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

مثال) در مثلث ABC، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 8$ است. طولهای دو قطعه‌ای که نیسون زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را بیابید.

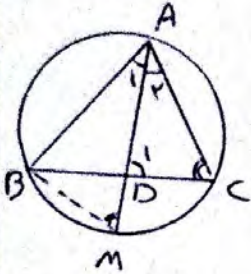


$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{4}{8} \Rightarrow \frac{4}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = \frac{4}{1/2} = 8$$

$$AD = AC - CD = 4 - \frac{8}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

قضیه طول نیساز داخلی
 ثابت کنید در هر مثلث، مربع طول هر نیساز داخلی برابر است با حاصل
 ضرب طول اضلاع آن زاویه منهای حاصلضرب طول قطعات ایجاد شده
 توسط نیساز داخلی روی ضلع مقابل.



فرض	AD نیساز داخلی \hat{A}
قلم	$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

اثبات: مطابق شکل ابتدا دایره محیطی مثلث ABC

را رسم می‌کنیم پس نیساز AD را امتداد داده تا دایره محیطی را در M

قطع کند

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{زر ز} \\ \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ACD \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AM} = \frac{DC}{BM}$$

$$\hat{C} = \hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow AD \cdot AM = AB \cdot AC \Rightarrow AD(AD + MD) = AB \cdot AC$$

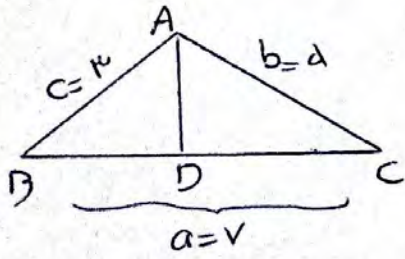
$$\Rightarrow AD^2 + AD \cdot MD = AB \cdot AC \quad (1)$$

طبق روابط طولی در دایره

$$AD \cdot MD = BD \cdot DC \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AD^2 + BD \cdot DC = AB \cdot AC \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

مثال) در مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ طول نیساز داخلی نسبت به زاویه رابعا



$$AD \text{ نیساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{3+4}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow \boxed{BD = \frac{15}{7}} \Rightarrow CD = 5 - \frac{15}{7} = \frac{20}{7}$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC = 3 \times 4 - \frac{15}{7} \times \frac{20}{7} = 12 - \frac{300}{49} = \frac{294}{49}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{14}{7}$$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info