حسابان

فصل ۲

تابع

- یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. اعضای A و B هر شیء می‌توانند باشند اما اگر $A \subseteq \Re$ و $B \subseteq \Re$ تابع f را تابع حقیقی می‌نامیم.
- A را دامنه تابع ، B را هم دامنه آن و مجموعه $\{f(x) | x \in A\}$ را برد تابع f گوییم.

مثال: تابع حقیقی $f: A \to B$ را که در آن $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و هر عضواز f به صورت $(t,۲t)$ می‌باشد را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه B را توصیف کنید.

ب) تابع f را با اعضایش مشخص کنید.

ج) ضابطه تابع f را مشخص کنید؟

د) اگر $B = N$ (N مجموعه اعداد طبیعی است)، معرفی کاملی از تابع f را بنویسید.

حل:

الف) مجموعه B هر زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی شامل مجموعه $\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ می‌تواند باشد

ب) اعضای تابع f به صورت $f = \{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶),(۴,۸),(۵,۱۰)\}$ می‌باشد.

ج) ضابطه تابع f را می‌توان به صورت $f(x) = ۲x$ نوشت.

د) تابع f را می‌توان به صورت‌های $\begin{cases} f: A \to N \\ f(x) = ۲x \end{cases}$ یا $\begin{cases} f: \{۱,۲,۳,۴,۵\} \to \{۱,۲,۳,۴,۵,...\} \\ f(x) = ۲x \end{cases}$ نوشت که به‌طورکامل تابع فوق را معرفی می‌کنند توجه کنید که مجموعه A دامنه تابع f و مجموعه N، هم دامنه تابع و همچنین برد تابع مجموعه $\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ می‌باشد.

مثال: مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو می‌باشد و تابع g از A به B تعریف شده است.

الف) در نمودار ون مربوط به تابع g چند پیکان باید وجود داشته باشد.

ب) نمودار ون تابع g را طوری رسم کنید که $m < n$.

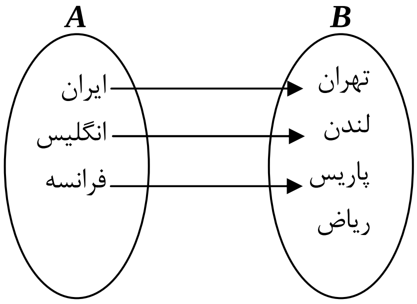
ج) نمودار ون تابع g را طوری رسم کنید که $m = n$.

د) نمودار ون تابع g را طوری رسم کنید که $m > n$.

حل:

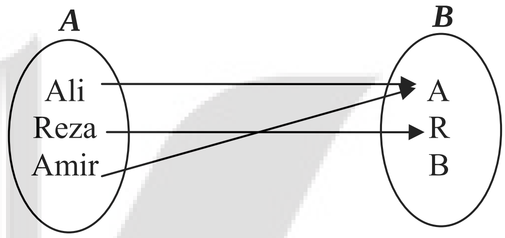
الف) با توجه به اینکه از هر عضو A دقیقاً یک پیکان باید خارج شده باشد بنابراین دقیقاً باید m پیکان از A به B کشیده شود.

ب) بی‌شمار تابع برای g می‌توان در نظر گرفت. به عنوان مثال می‌توان gرا چنین در نظر گرفت:



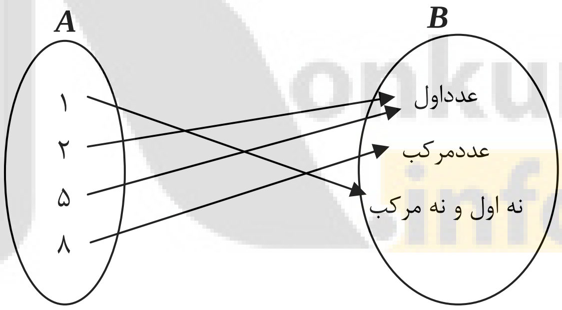
مجموعه {فرانسه، انگلیس، ایران} دامنه تابع و مجموعه {ریاض، پاریس، لندن، تهران} هم دامنه تابع و مجموعه {پاریس، لندن، تهران} برد تابع می‌باشند.

ج) می‌توان g را چنین در نظر گرفت.



مجموعه $\{Ali, Reza, Amir\}$دامنه تابع و $\{A, R, B\}$ هم دامنه تابع و مجموعه $\{A, R\}$ برد تابع می‌باشند.

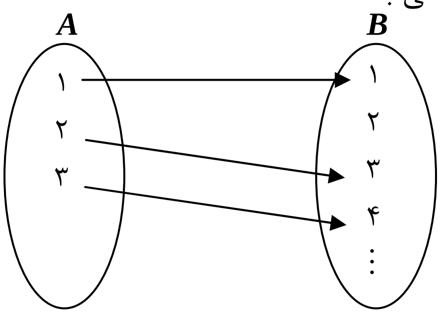
د) تابع g را می‌توان چنین در نظر گرفت:



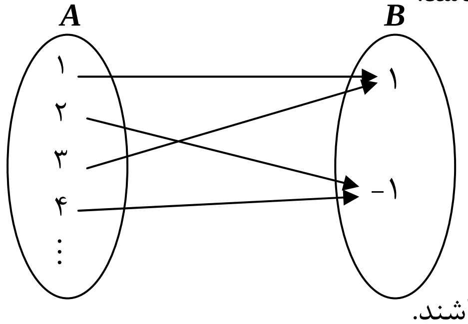
مجموعه **{۱,۲,۵,۸}** دامنه تابع و مجموعه {نه اول و نه مرکب، عدد مرکب، عدد اول} هم دامنه و برد تابع هستند.

مثال: تابع $g : A \to B$ را طوری مشخص کنید که:

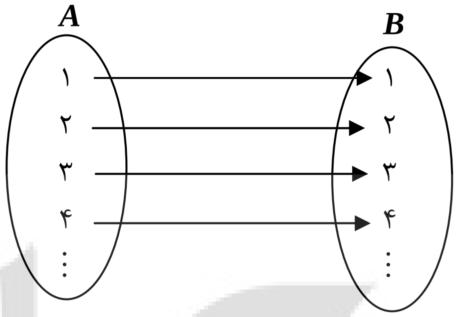
الف) A متناهی و B نامتناهی باشد.



ب) A نامتناهی و B متناهی باشد.



ج) A و B هر دو نامتناهی باشند.



مثال: الف) تابع f با ضابطه $y=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ را رسم کنید.

ب) تابع $g:[-۲۰,۲۰]\to\Re$ با ضابطه $g(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ را رسم کنید.

ج) آیا تابع h را می‌توان به قسمی در نظر گرفت که دامنه و ضابطه آن با تابع g یکی باشد اما هم دامنه آن مجموعه Z باشد.

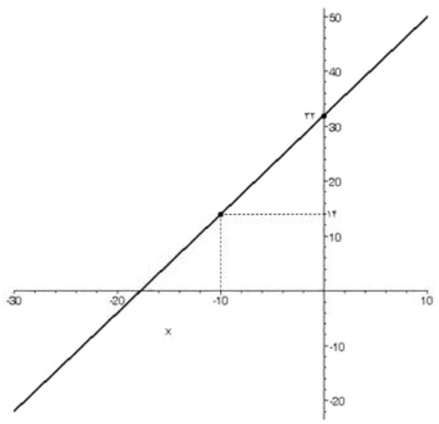
حل:

الف) با توجه به اینکه نمودار ضابطه داده شده یک خط است و هر خط با ۲ نقطه مشخص می‌شود کافی است ۲ نقطه از این خط را یافته و خط را رسم کرد.

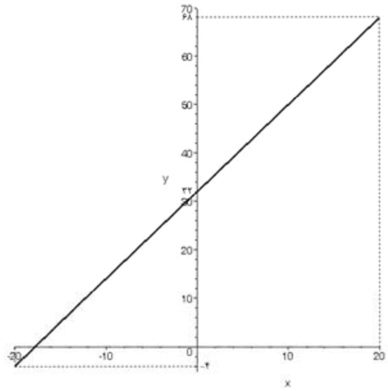
به عنوان مثال:

$$x=۰\Rightarrow y=۳۲\Rightarrow(۰\ ,\ ۳۲)\in f\ ,\quad x=-۱۰\Rightarrow y=۱۴\Rightarrow(-۱۰,۱۴)\in f$$

لذا شکل آن به صورت زیر خواهد بود.



ب) نموار این تابع قسمتی از تابع f است که در آن $-۲۰ \le x \le ۲۰$. در واقع تابع g را تحدید تابع f می‌نامیم و نمودار آن چنین است:

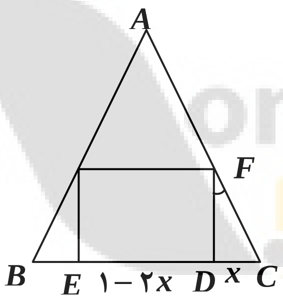


ج) با توجه به اینکه $\frac{۱۶۹}{۵} = ۳۲ + \frac{۹}{۵} = g(۱)$ و $\frac{۱۶۹}{۵} \notin Z$ لذا چنین تابعی نمی‌توان یافت.

مثال: از بین مستطیل‌های قابل محاط شدن در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ کدام مستطیل بیش‌ترین مساحت را دارد؟

حل: طبق شکل اگر DC را برابر x بگیریم، داریم $D\hat{F}C = ۳۰^\circ$ (چرا؟) و از آن‌جا $FC = ۲x$. با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$FC^۲ = DC^۲ + FD^۲ \Rightarrow (۲x)^۲ = x^۲ + FD^۲ \Rightarrow FD = \sqrt{۳}\, x$$



لذا مساحت مستطیل فوق از رابطه $S = (۱-۲x)x\sqrt{۳}$ بدست می‌آید و داریم:

$$s = -۲\sqrt{۳}\,(x^۲ - \frac{۱}{۲}x) = -۲\sqrt{۳}[(x-\frac{۱}{۴})^۲ - \frac{۱}{۱۶}] = -۲\sqrt{۳}(x-\frac{۱}{۴})^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

اما بیشترین مقدار عبارت $-۲\sqrt{۳}(x-\frac{۱}{۴})^۲$ صفر است که به ازای $x = \frac{۱}{۴}$ به دست می‌آید و لذا ماکزیمم S برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ است و طول و عرض این مستطیل برابر است با $x\sqrt{۳} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۳}$ و

$$۱ - ۲x = ۱ - ۲(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}$$

تمرین:

۱- اگر رابطه‌ی $f=\{(-۳,۲),(۳,a),(۳\,,-۱),(۳a\,,b)\}$ تابع باشد a و b را بیابید.

۲- m را طوری بیابید که رابطه $\{(m,-۱),(۲,-۲),(۱\,,m^۲-۴),(۱\,,۰)\}$ تابع باشد.

۳- نمودار ون مربوط به رابطه‌ی $|x|+|y|=۱$ را که در آن x و y اعدادی صحیح هستند را رسم کنید. آیا این رابطه تابع است؟

۴- دامنه تابع f مجموعه $D_f=\{x:|x+۱|\le ۲\}$ می‌باشد و تابع f به ازای $\{x:|x|<۱\}$، $f(x)<۰$ و به ازای سایر xها $f(x)\ge ۰$، دامنه $g(x)=\sqrt{f(x)}$ را بیابید.

۵- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

الف) $y=\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$ ب) $y=\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}}$

ج) $y=\frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{x-۱}}$ د) $y=\sqrt{\frac{۱+x}{x-۱}}$

ه) $y=\sqrt{۴x-x^۳}$ و) $y=\sqrt{\frac{x+۳}{۱-۲x}}$

ز) $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(x^۲-۱)$ ح) $y=\log_{\frac{۱}{۳}}(\log_۲^x)$

ط) $y=\log_۲(\log_{\frac{۱}{۳}} x)$ ی) $y=\log(\sin x)$

۶- برای اندازه‌گیری دما از واحدهای سانتی‌گراد C و فارنهایت F استفاده می‌شود که با رابطه‌ی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$ به یکدیگر وابسته هستند در چه دمایی هر دو واحد یک عدد را نشان می‌دهد؟

۷- نمودار تابعی را رسم کنید که هر سه ویژگی زیر را داشته باشد:

الف) دامنه آن بازه $[-۱\,,۳)$ باشد.

ب) برد آن بازه $(۱\,,۴]$ باشد.

ج) یک به یک نباشد.

۸- ارتفاع یک جسمی که به بالا پرتاب شده است از رابطه $h=-۵t^۲+۲۰t$ به دست می‌آید که در آن t زمان طی شده پس از پرتاب جسم بر حسب ثانیه و h ارتفاع جسم بر حسب متر است.

الف) پس از یک ثانیه جسم در چه ارتفاعی قرار دارد؟

ب) جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

ج) پس از چه زمانی جسم به زمین برخورد می‌کند؟

د) در چه بازه‌ی زمانی ارتفاع جسم از ۱۵ متر بیشتر است؟

ه) در چه بازه‌ی زمانی ارتفاع جسم حداکثر ۱۰ متر است؟

۹- اگر تابع f به ازای هر $x\ge\frac{۱}{۲}$ در رابطه‌ی $f(\frac{x-۱}{x})=\sqrt{۲x-۱}$ صدق کند دامنه و برد تابع را بیابید.

۱۰- اگر $f(\frac{۲x+۱}{x})=۵x-۱$ ، $f(۴)$ را بیابید.

۱۱- اگر $f(\frac{x-۱}{x})=\sqrt{۲x-۱}$ ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

۱۲- اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

۱۳- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است اگر حاصل ضرب آن دو عدد مینیمم باشد دو عدد را بیابید.

۱۴- دو ضلع از مستطیلی منطبق بر جهت مثبت محورهای مختصات بوده و رأس چهارم آن بر خط به معادله $y=-۳x+۹$ واقع می‌باشد بیشترین مساحت ممکن این مستطیل چقدر است؟

۱۵- محیط مستطیلی ۲۰۰ متر است ابعاد آن را چنان بیابید که مساحت آن ماکزیمم شود.

۱۶- مساحت مستطیلی ۶۴ متر مربع است ابعاد آن را به قسمی بیابید که محیط آن مینیمم شود.

۱۷- از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن بر محور xها منطبق و دو رأس آن روی منحنی تابع $y=۶-x^{۲}$ (با شرط $y>۰$) قرار دارد کدام مستطیل بیشترین محیط را دارد؟

۱۸- نقطه A به طول ۴ بر محور طول‌ها واقع است بر منحنی $y=۳\sqrt{x}$ نقطه‌ای را بیابید که فاصله‌اش از A کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

۱۹- کوتاهترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی به معادله $y^{۲}=۲x-۱$ چقدر است؟

۲۰- از بین مثلثهایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۲ است بیشترین مساحت را چه مثلثی دارد؟

۲۱- از بین مستطیل‌هایی که محیط آن مقدار ثابت k است کدام مستطیل کمترین طول قطر را دارد؟

۲۲- بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله یک طناب به طول ۲۴۰۰ متر در حاشیه یک دریا می‌توان محصور کرد چند متر مربع است (ضلع مجاور به دریا نیازی به محصور کردن ندارد).

۲۳- از بین استوانه‌هایی که مجموع ارتفاع و شعاع قاعده آن‌ها عدد ثابت k است کدام استوانه بیشترین سطح جانبی را دارد؟

۲۴- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ واحد است کدام بیشترین مساحت را دارد.

❖ **دوتابع f و g در صورتی مساویند که هردو شرط زیر برقرار باشد:**

الف) دامنه دو تابع با هم برابر باشند.

ب) به ازای هر عضو از دامنه آن‌ها داشته باشیم $f(x)=g(x)$.

مثال: توابع $f=\{(۳,۴),(۷,-۱),(۹,۵)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۷,۵),(۹,-۱)\}$ را در نظر بگیرید. آیا این دو تابع با هم مساویند.

حل: دامنه این دو تابع مجموعه $\{۳,۷,۹\}$ است که با هم مساوی است. $f(۷)=-۱$ ولی $g(۷)=۵$ پس دو تابع با هم مساوی نیستند.

مثال: توابع $\begin{cases} f: A\to \Re \\ f(x)=۳x^۳+۱\end{cases}$ و $\begin{cases} g: A\to \Re \\ g=\{(۱,a),(b,۲),(a,c)\}\end{cases}$ را در نظر بگیرید. a، b و c را طوری بیابید که دو تابع با هم مساوی باشند.

حل: چون $۱\in D_g$ لذا باید $۱\in D_f$ و $f(۱)=۴$ پس باید $g(۱)=۴$ یعنی $a=۴$. همچنین $g(b)=۲$ و از حل معادله $f(x)=۲$ نتیجه می‌شود که $x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}$ لذا $b=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}$. با استدلال‌های مشابه $۴\in D_g$ و در نتیجه باید $۴\in D_f$ و چون $f(۴)=۱۹۳$ لذا $g(۴)=۱۹۳$ یعنی $c=۱۹۳$.

پس تابع g به صورت $g(x)=\left\{(۱,۴),(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}},۲),(۴,۱۹۳)\right\}$ بوده و A نیز چنین است: $A=\left\{۱,\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}},۴\right\}$.

مثال: توابع $f(x)=\sin^۲ x+\cos^۲ x$ و $g(x)=۱$ با هم برابرند دقت کنید که دامنه هر دو تابع مجموعه $\Re$ است.

مثال: آیا توابع $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=x$ با هم مساویند؟

حل: دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی است اما به ازای هر $x<۰$ مقادیر دو تابع برابر نیست. مثلاً $f(-۵)=\sqrt{(-۵)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$ ، ولی $g(-۵)=-۵$.

مثال: آیا توابع $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\frac{۱}{\cot x}$ با هم برابرند؟

حل: می‌دانید که $\tan x$ به ازای هر $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in Z$ تعریف نشده است یعنی این نقاط در دامنه تابع f قرار ندارند.

امّا $\cot x$ به ازای هر $x=k\pi, k\in Z$ تعریف نشده و به ازای هر $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in Z$ صفر می‌شود لذا مجموعه این نقاط یعنی نقاط به طول $x=k\frac{\pi}{۲}, k\in Z$ عضو دامنه تابع g نمی‌باشد.

بنابراین دامنه این دو تابع برابر نیست. به عنوان مثال $f(0)$ تعریف شده و برابر صفر است اما تابع g به ازای $x=0$ تعریف نشده است.

مثال: به طور مشابه با مثال قبل توابع $f(x)=\log x^2$ و $g(x)=2\log x$ با هم برابر نیستند زیرا دامنه تابع f مجموعه $R-\{0\}$ است ولی دامنه تابع g مجموعه $\{x|\ x>0\}$ می‌باشد که برابر نیستند.

مثال: M و L را طوری بیابید که توابع f و g باهم برابر باشند.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4} & x\neq -2,2\\ L & x=-2\\ 5 & x=2\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & x\neq 2\\ M & x=2\end{cases}$$

حل: اولاً دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی است و $M=g(2)$ و $f(2)=5$ بنابراین $M=5$.

هم‌چنین $f(-2)=L$ و $g(-2)=\dfrac{1}{-4}$ لذا $L=-\dfrac{1}{4}$. توجه کنید که اگر $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ آن-گاه:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}$$

چون $x\neq -2$، ساده کردن اشکالی را به وجود نمی‌آورد و $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$، یعنی به ازای هر $x\neq 2\ ,x\neq -2$ نیز این دو تابع با هم برابرند و لذا با قرار دادن $M=5$ و $L=-\dfrac{1}{4}$ دو تابع f و g با هم مساوی خواهند شد.

تمرین:

۱- تحقیق کنید آیا هر جفت از توابع داده شده با هم مساویند یا خیر و چرا؟

الف) $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)}$ و $g(x)=\sqrt{\dfrac{(x-3)^3}{x-3}}$

ب) $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$ و $g(x)=\cos x$

ج) $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x}}$

د) $f(x)=\sqrt{x^2+1}\quad x\neq 0$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+x^3}}{x}$

هـ) $f(x)=\sqrt{-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$

و) $f(x)=\sqrt{x-1}\ .\ \sqrt{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

ز) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ و $g(x)=|x|$

ح) $f(x)=\sqrt{۱-x}\ .\ \sqrt{۱+x}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$

ط) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^۳+x^۲}{۵-x}}$ و $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x+۱}}{\sqrt{۵-x}}$

ی) $f(x)=۱+\cot^۲ x$ و $g(x)=\dfrac{۱+\tan^۲ x}{\tan^۲ x}$

۲- کدام تابع با بقیه مساوی نیست؟

$$y=\sqrt{\frac{۲-x}{x+۳}}\quad,\quad y=\frac{\sqrt{۲-x}}{\sqrt{x+۳}}\quad,\quad y=\sqrt{\frac{x-۲}{-x-۳}}\quad,\quad y=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{-x-۳}}$$

۳- اگر توابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & x\neq -۱\\ K & x=-۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-x}{x} & x\neq ۰\\ L & x=۰\end{cases}$ با هم برابر باشند مقدار K و L را بیابید.

توابع چند ضابطه‌ای

❖ **توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای می‌نامند.**

امروزه توابعی که در سازمان‌ها جهت محاسبه‌ی هزینه‌ی آب، برق، گاز، تلفن و … مشترکین مورد محاسبه قرار می‌گیرد به صورت توابع چند ضابطه‌ای می‌باشد.

مثال: یک مغازه زنجیره‌ای جهت جذب مشتری اعلام کرده است که به مشتریانی که مبلغ خریدشان حداقل ۲۰۰۰۰ تومان باشد ۵٪ و مشتریانی که مبلغ خریدشان حداقل ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد ۱۰٪ تخفیف می‌دهد تابع فوق را مشخص کنید.

حل: x را مبلغ خرید مشتری و $y=f(x)$ را مبلغی که مشتری باید بپردازد در نظر بگیرید خواهیم داشت

$$f(x)=\begin{cases}x & ۰<x<۲۰۰۰۰\\ ۰/۹۵x & ۲۰۰۰۰\leq x<۱۰۰۰۰۰\\ ۰/۹x & x\geq ۱۰۰۰۰۰\end{cases}$$

مثال: مدرسی تصمیم می‌گیرد جهت ارفاق به دانشجویان خود، نمره دانشجویانی که کمتر از ۸ است را از فرمول $\dfrac{x}{۲}+۶$ ودانشجویانی که نمره ۸ تا ۲۰ گرفته‌اند را از فرمول $\dfrac{۵}{۶}x+\dfrac{۱۰}{۳}$ محاسبه کند.

الف) تابع را مشخص کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) اگر دانشجویی در امتحان نمره ۱۱ گرفته باشد نمره نهایی او چقدر است؟

حل: x را نمره برگه دانشجو و $y=f(x)$ را نمره نهایی او در نظر بگیرید خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} ۶+\dfrac{x}{۲} & ۰\le x<۸ \\ \dfrac{۵}{۶}x+\dfrac{۱۰}{۳} & ۸\le x\le ۲۰ \end{cases}$$

بدیهی است دامنه تابع یعنی نمراتی که دانشجو گرفته است از صفر تا ۲۰ یعنی $[۰\,,۲۰]$ می‌باشد.

اما برد آن یعنی نمراتی که مدرس ثبت خواهد کرد چنین به دست می‌آید:

$$۰\le x\le ۸\Rightarrow ۰\le \frac{x}{۲}<۴\rightarrow ۶\le ۶+\frac{x}{۲}<۱۰$$

$$۸\le x\le ۲۰\Rightarrow \frac{۴۰}{۶}\le \frac{۵}{۶}x\le \frac{۱۰۰}{۶}\rightarrow ۱۰\le \frac{۵}{۶}x+\frac{۱۰}{۳}\le ۲۰$$

یعنی برد تابع یا نمرات نهایی مجموعه $[۶\,,۲۰]$ می‌باشد.

ب) برای محاسبه نمره نهایی دانشجویی که نمره ۱۱ گرفته است باید از ضابطه دوم استفاده کرد، یعنی:

$$\text{نمره نهایی}=\frac{۵}{۶}\times ۱۱+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۹۵}{۶}=۱۲/۵$$

مثال: تابع چند ضابطه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$g(x)=\begin{cases} x^۲ & x<-۲ \\ ۵ & -۲\le x\le ۲ \\ ۴-۲x & x>۲ \end{cases}$$

الف) دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

ب) مقدار $g(g(-۳))$ را بیابید.

حل: الف) دامنه به وضوح مجموعه اعداد حقیقی است.

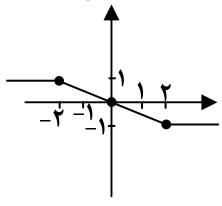
برای محاسبه برد آن ملاحظه می‌کنیم که

$$\left.\begin{array}{l} x<-۲\Rightarrow x^۲>۴\Rightarrow g(x)>۴ \\ -۲\le x\le ۲\Rightarrow g(x)=۵ \\ x>۲\Rightarrow -۲x<-۴\Rightarrow ۴-۲x<۰\Rightarrow g(x)<۰ \end{array}\right\}\Rightarrow R_g=(-\infty\,,۰)\cup(۴\,,+\infty)$$

ب)

$$g(-۳)=(-۳)^۲=۹\Rightarrow g(g(-۳))=g(۹)=۴-۲\times ۹=-۱۴$$

مثال: نمودار تابع f به شکل زیر است ضابطه آن را مشخص کنید.



حل: واضح است که اگر $x \leq -۲$ آن گاه $f(x) = ۱$ و اگر $x \geq ۲$ آن گاه $f(x) = -۱$ امّا به ازای $-۱ \leq x \leq ۱$ نمودار تابع خطی است لذا با داشتن دو نقطه از آن مثلاً نقاط $(-۲,۱)$ و $(۰,۰)$ می‌توان معادله آن را به دست آورد. شیب خط برابر است با $\frac{۱-۰}{-۲-۰} = -\frac{۱}{۲}$ و معادله آن به صورت $y - ۰ = -\frac{۱}{۲}(x - ۰)$ یا $y = -\frac{۱}{۲}x$ است لذا ضابطه تابع f به صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x < -۲ \\ -\frac{۱}{۲}x & -۲ \leq x \leq ۲ \\ -۱ & x > ۲ \end{cases}$$

می‌باشد توجه کنید که این تابع را می‌توان به صورت $f(x) = \frac{۱}{۴}(|x-۲| - |x+۲|)$ نیز نوشت. چرا؟

تمرین:

۱- تابع $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases}$ (تابع علامت) یک تابع چند ضابطه‌ای است نمودار آن را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

۲- تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \frac{x}{|x|}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

۳- تابع $D(x) = \begin{cases} ۱ & x \in Q \\ ۰ & x \notin Q \end{cases}$ به تابع دیریکله معروف است. دامنه و برد این تابع را بیابید و مقادیر $D(D(\sqrt{۲}))$ و $D(D(-۴))$ محاسبه کنید.

۴- تابع $u_c(t) = \begin{cases} ۰ & t < c \\ ۱ & t \geq c \end{cases}, \ c \geq ۰$ را تابع پله‌ای واحد گویند. تابع $u_۲(t)$ را رسم کنید.

۵- تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & , |x| < ۲ \\ |x| & , |x| \geq ۲ \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید سپس مقادیر $f(-۳)$ و $f(f(-۳))$ را بیابید.

۶- تابع $f : N \to \Re$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -\frac{n}{۲} & n \in E \\ \frac{n-۱}{۲} & n \in O \end{cases}$ مفروض است برد تابع را بیابید. (E و O به ترتیب مجموعه‌های اعداد طبیعی زوج و فرد می‌باشند.)

۷- ضابطه‌های متفاوت تابع $f(x) = |x| + |x-۱|$ را بیابید و سپس آن را رسم کنید.

۸- یک شرکت خصوصی، هزینه مصرف انرژی توسط مشترکین خود را چنین محاسبه می‌کند:

مصرف تا ۲۰ واحد، قیمت به ازای هر واحد ۲۵۰۰ ریال.

مازاد مصرف از ۲۰ تا ۲۰۰ واحد، قیمت هر واحد اضافی به ازای هر واحد ۵۰۰۰ ریال.

مازاد مصرف از ۲۰۰ تا ۱۰۰۰ واحد، قیمت هر واحد اضافی به ازای هر واحد ۷۵۰۰ ریال.

مازاد مصرف از ۱۰۰۰ به بالا، قیمت هر واحد اضافی به ازای هر واحد ۲۰۰۰۰ ریال.

الف) تابع مربوط به هزینه مشترکین را بنویسید.

ب) اگر مشترکی ۱۰۵۰ واحد مصرف کرده باشد مبلغ قابل پرداخت او چقدر است؟

معادلات و توابع

❖ **در رابطه‌هایی که شامل x و y هستند اگر به ازای هر x تنها یک y داشته باشیم این رابطه نسبت به متغیر مستقل x تابعی را مشخص می‌کند به‌ویژه اگر بتوان y را بر حسب x محاسبه کرد اگر به رابطه‌ای به فرم $y=\pm f(x)$ که y همواره صفر نباشد، برسیم؛ رابطه فوق تابعی را مشخص نمی‌کند به عبارت دیگر f تابع است اگر و تنها اگر بتوان نشان داد:**

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱=x_۲$$

یا به طور معادل

$$f(x_۱)\neq f(x_۲)\Rightarrow x_۱\neq x_۲$$

مثال: بررسی کنید روابط زیر تابع‌اند یا خیر؟

الف) $y^۲-x^۳=۱$ ب) $x^۲+y^۲-۲y=-۱$

ج) $y^۳+x^۲=۲$ د) $x+|y|=۰$

حل:

الف) داریم:

$$y^۲-x^۳=۱\Rightarrow y^۲=۱+x^۳\Rightarrow y=\pm\sqrt{۱+x^۳}$$

یعنی به ازای هر $x>-۱$ بیش از یک y داریم. مثلاً اگر $x=۰$ داریم $y=\pm۱$. لذا این رابطه مشخص کننده‌ی یک تابع نیست. البته تنها ذکر این مطلب که هر دو نقطه $(۰\,,\,۱)$ و $(۰\,,-۱)$ روی نمودار این رابطه قرار دارد نشان دهنده‌ی این است که رابطه‌ی فوق تابع نمی‌باشد.

ب) داریم:

$$x^۲+y^۲-۲y=-۱\Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۰\Rightarrow (y-۱)^۲=-x^۲$$

$$\Rightarrow y-۱=\pm\sqrt{-x^۲}\Rightarrow y=۱\pm\sqrt{-x^۲}$$

اما x تنها مقدار صفر را می‌تواند اختیار کند که خروجی آن تنها یک می‌باشد یعنی در این رابطه تنها زوج مرتب $(۰\ ,\ ۱)$ صدق می‌کند لذا y تابعی از x است.

ج) داریم:

$$y^{۳}+x^{۲}=۲\Rightarrow y^{۳}=۲-x^{۲}\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۲-x^{۲}}$$

یعنی به ازای هر x، y منحصر به فردی وجود دارد یعنی y تابعی از x است برای اثبات این مطلب می‌توان نوشت:

$$x_{۱}=x_{۲}\Rightarrow x_{۱}^{۲}=x_{۲}^{۲}\Rightarrow ۲-x_{۱}^{۲}=۲-x_{۲}^{۲}\Rightarrow \sqrt[۳]{۲-x_{۱}^{۲}}=\sqrt[۳]{۲-x_{۲}^{۲}}\Rightarrow y_{۱}=y_{۲}$$

د) داریم:

$$x+|y|=۰\Rightarrow |y|=-x\Rightarrow y=\pm(-x)\quad ,\quad x\leq ۰$$

یعنی اگر $x>۰$، هیچ نقطه‌ای در رابطه صدق نمی‌کند. اگر $x=۰$، تنها نقطه‌ی $(۰\ ,\ ۰)$را مشخص می‌کند اما اگر $x<۰$، به ازای هر x، دو y نظیر می‌شود؛ لذا y تابعی از x نیست. مثلاً اگر $x=-۱$ داریم $y=\pm ۱$. یعنی دو نقطه $(-۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ را مشخص می‌کند لذا این رابطه تابعی را نسبت به x مشخص نمی‌کند. اما این رابطه یک تابع x بر حسب y را مشخص می‌کند. چرا؟

تمرین:

۱- تحقیق کنید روابط زیر نسبت به متغیر مستقل x تابع هستند یا خیر؟

الف) $x^{۷}+y^{۷}=۱$ ب) $x^{۲}+y^{۲}=۴$

پ) $x^{۶}+y^{۶}=۰$ ت) $x^{۳}+y^{۴}=۲$

ث) $|y|=x$ ج) $|x|+|y|=۲$

چ) $y=\sqrt{x^{۲}}$ ح) $x=\sqrt{y}$

خ) $x^{۲}-۴xy+۴y^{۲}=۰$ د) $|y-۱|+|x+۱|=۰$

ذ) $y^{۳}=۲x+۱$ ر) $|x|+y^{۲}=۰$

ز) $y^{۳}-y=۳x$ س) $y^{۲}+y=۲x$

ش) $y=x^{۳}-۳x$ ص) $y^{۲}-y=۲x+۱$

ض) $x^{۲}+۳y+x-۵=۰$ ط) $x^{۲}=y^{۲}+۲y+۱$

ظ) $xy+x^{۲}-y=۰$ ع) $|x+۲|+\sqrt{y^{۲}-۲x+۱}=۰$

۲- تحقیق کنید روابط داده شده در تمرین (۱) نسبت به متغیر مستقل y تابع هستند یا خیر؟

۳- اگر رابطه $|y|=|x^{۳}-۱|$ تابع باشد، آن را مشخص کنید.

۴- تحقیق کنید آیا ضابطه‌های داده شده نمایش دهنده تابع هستند یا خیر؟

الف) $f(x^{۲}+۲)=x+۱$.

ب) $f(x^{۲}-۲)=x^{۲}+۱$.

ج) $f(|x|-۱)=x+۱$.

رسم نمودار توابع وابسته به f با استفاده از نمودار تابع f

❖ **(۱) نمودار تابع $g(x)=f(x)+a$ همان نمودار تابع $f(x)$ است که a واحد در امتداد محور yها منتقل شده است. (اگر $a>0$ انتقال در جهت مثبت محور y و اگر $a<0$ انتقال در جهت منفی می‌باشد.)**

توجه کنید اگر $(x_0, y_0)\in f$ یعنی $y_0=f(x_0)$ آن گاه $g(x_0)=f(x_0)+a=y_0+a$ یا $(x_0, y_0+a)\in g$ یعنی نقطه به اندازه a واحد به موازات محور yها منتقل شده است.

❖ **(۲) نمودار تابع $h(x)=f(x+a)$ همان نمودار تابع f است که a واحد در امتداد محور xها منتقل شده است. (اگر $a>0$ انتقال در جهت منفی محور و اگر $a<0$ انتقال در جهت مثبت می‌باشد.)**

توجه کنید که اگر $(x_0, y_0)\in f$ یعنی $y_0=f(x_0)$ آن‌گاه:

$$h(x_0-a)=f(x_0-a+a)=f(x_0)=y_0$$

یا $(x_0-a, y_0)\in h$. یعنی نقطه به اندازه a واحد به موازات محور xها منتقل شده است.

❖ **(۳) نمودار تابع $k(x)=a\,f(x)$ با کشیدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور yها به دست می‌آید (اگر $a>1$، انبساط در امتداد محور yها و با ضریب a رخ می‌دهد و اگر $0<a<1$، انقباض و در امتداد محور yها و با ضریب a رخ می‌دهد و اگر $a<0$ برای بدست آوردن نمودار تابع $y=k(x)$ ابتدا قرینه نمودار f نسبت به محور xها یعنی نموار تابع $y=-f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس نمودار جدید را با ضریب $-a$ منبسط یا منقبض (بسته به اینکه $-a>1$ یا $0<-a<1$) می‌کنیم.**

توجه کنید اگر $(x_0, y_0)\in f$ یعنی $y_0=f(x_0)$ آن گاه $k(x_0)=a\ f(x_0)=ay_0$ یعنی $(x_0\ , ay_0)\in k$ که موید نکته گفته شده است.

❖ **(۴) نمودار تابع $t(x)=f(ax)\ ,\ a>0$ با کشیدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست می‌آید. (اگر $a>1$ نمودار f با ضریب $\frac{1}{a}$، منقبض شده و اگر $0<a<1$ نمودار f با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط خواهد شد.)**

توجه کنید که اگر $(x_\cdot , y_\cdot) \in f$ یعنی $y_\cdot = f(x_\cdot)$ آن‌گاه $t(\frac{x_\cdot}{a}) = f(a \times \frac{x_\cdot}{a}) = f(x_\cdot) = y$

یعنی $(\frac{x_\cdot}{a} , y_\cdot) \in t$ که نکات گفته شده را تایید می‌کند.

❖ **(۵) برای رسم نمودار تابع $M(x) = f(ax)$ که در آن $a < 0$ با توجه به آن‌که نمودار تابع $l(x) = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور yها است برای رسم تابع $M(x) = f(ax)$, $a < 0$ ابتدا می‌توان نمودار تابع $N(x) = f(-ax)$ را مانند آن‌چه در (۴) بیان شد، رسم نمود سپس نمودار تابع M که $M(x) = N(-x)$ می‌باشد را با رسم قرینه نمودار تابع N نسبت به محور yها رسم کرد.**

توجه کنید که اگر $(x_\cdot , y_\cdot) \in f$ یعنی $y_\cdot = f(x_\cdot)$ آن‌گاه:

$$l(-x_\cdot) = f(-(-x_\cdot)) = f(x_\cdot) = y_\cdot$$

یعنی $(-x_\cdot , y_\cdot) \in l$ که قرینه‌ی نقطه $(x_\cdot , y_\cdot)$ نسبت به محور yها است.

❖ **(۶) برای رسم نمودار تابع $p(x) = af(bx+c)+d$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:**

الف) اگر $b > 0$ مطابق مرحله (۴) نمودار f را با ضریب $\frac{1}{b}$ در امتداد محور ط انقباض یا انبساط می‌دهیم و اگر $b < 0$

مطابق مرحله (۵) عمل می‌کنیم. (در این حالت نمودار $y = f(bx)$ حاصل می‌شود.)

ب) با توجه به مرحله ۲ نموار بدست آمده در مرحله قبل را به اندازه $\frac{c}{b}$ در راستای محورxها و در جهت مخالف علامت $\frac{c}{b}$ انتقال دارد (در این حالت نمودار تابع $y = f(bx+c)$ حاصل می‌شود.

ج) با توجه به مرحل ۳ نمودار به دست آمده در مرحله قبل را انبساط یا انقباض داد. (با ضریب $|a|$. در این مرحله نمودار تابع $y = af(bx+c)$ بدست م‌آید.)

د) با توجه به مرحله ۱ نمودار به دست آمده در مرحله قبل را به اندازه d واحد در جهت محور yها انتقال می‌دهیم

(در این مرحله نموار تابع $y = af(bx+c)+d$ که همان $y = p(x)$ است به دست می‌آید.)

قابل ذکر است که در این مرحله اگر $a = 1$ یا $b = 1$ یا $c = 0$ یا $d = 0$ مرحله نظیر داده شده قابل حذف است.

توجه کنید که اگر $(x_{\circ}, y_{\circ}) \in f$ یعنی $y = f(x_{\circ})$ آن‌گاه:

$$p(\frac{x_{\circ} - c}{b}) = a\ f(b(\frac{x_{\circ} - c}{b}) + c) + d = a\ f(x_{\circ}) + d = ay_{\circ} + d$$

لذا

$$(\frac{x_{\circ}}{b} - \frac{c}{b}, a\, y_{\circ} + d) = (\frac{x_{\circ} - c}{b}, a\, y_{\circ} + d) \in p$$

که موید مطالب فوق است.

مثال: فرض کنید $A(۲,۳) \in f$، نقطه نظیر A را بر روی توابع زیر مشخص کنید.

الف) $g(x) = f(x) + ۱$ ب) $h(x) = f(x + ۱)$

ج) $k(x) = ۳f(۲x)$ د) $l(x) = ۲f(x + ۱)$

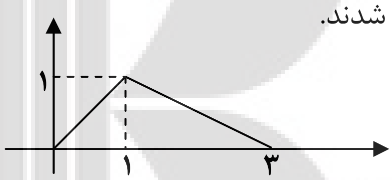
هـ) $t(x) = -۴f(-x)$ و) $p(x) = ۳f(۲x - ۱) + ۱$

حل:

الف) $(۲,۴) \in g$ ب) $(۱,۳) \in h$ ج) $(۱,۹) \in k$

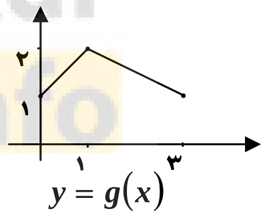
د) $(۱,۶) \in l$ هـ) $(-۲, -۱۲) \in t$ و) $(\frac{۳}{۲}, ۱۰) \in p$

مثال: فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد. مطلوب است رسم نمودار توابع g، h، k، t، l و p که در مثال قبل معرفی شدند.

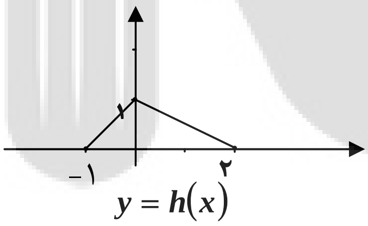


حل: داریم:

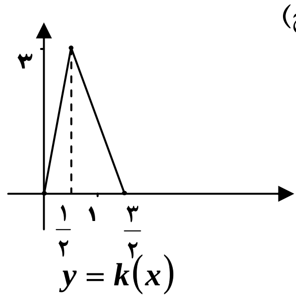
الف)



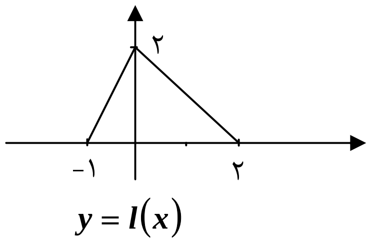
ب)



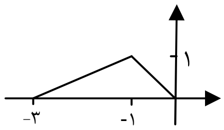
ج)



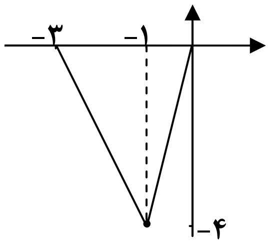
د)



هـ) توجه کنید که نمودار تابع $y = f(-x)$ به صورت زیر است:



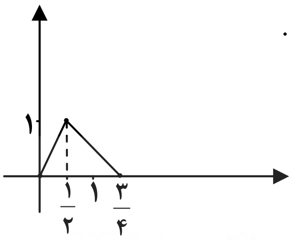
و با توجه به آن نمودار $y = t(x)$ به صورت زیر است:



$y = t(x)$

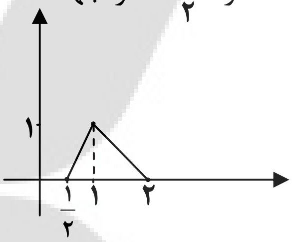
و) برای رسم نمودار تابع p مطابق دستورالعمل ۶ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی الف) نمودار $y = f(۲x)$.



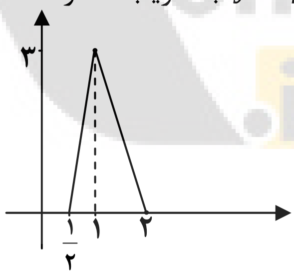
نمودار $y = f(۲x)$

مرحله‌ی ب) انتقال $y = f(۲x)$ به اندازه $+\frac{۱}{۲}$ در جهت محور xها.



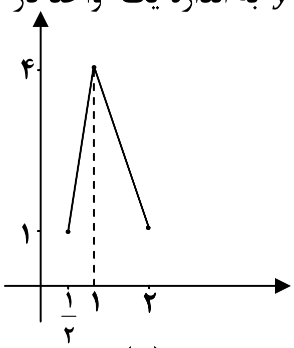
نمودار $y = f(۲x - ۱)$

مرحله‌ی ج) انبساط نمودار $y = f(۲x)$ با ضریب ۳ در امتداد محور yها.



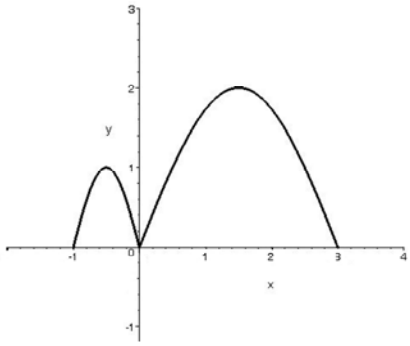
نمودار $y = ۳f(۲x - ۱)$

مرحله (د) انتقال $y = ۳f(۲x - ۱)$ به اندازه یک واحد در جهت محور yها.



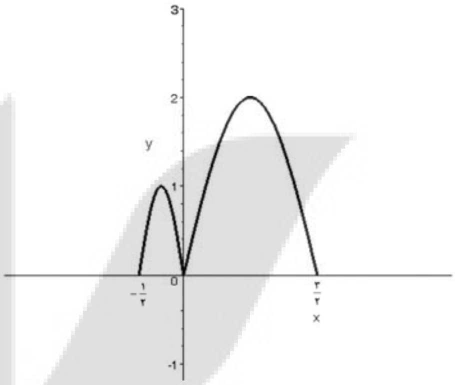
$y = p(x)$

مثال: اگر نمودار تابع $y=f\left(x\right)$ به شکل زیر باشد.

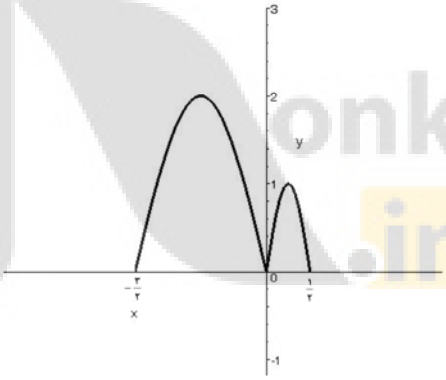


نمودار تابع $y=f\left(-۲x\right)$ را رسم کنید.

مطابق دستورالعمل ۵ و سپس ۴ ابتدا نمودار تابع $y=f\left(۲x\right)$ را رسم می‌کنیم:

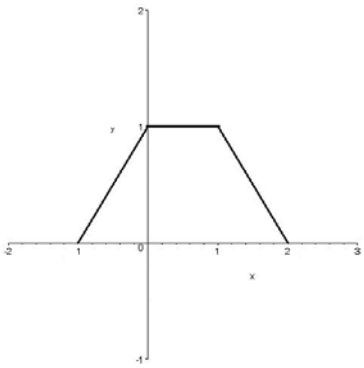


بنابراین نمودار $y=f\left(-۲x\right)$ به صورت می‌باشد:



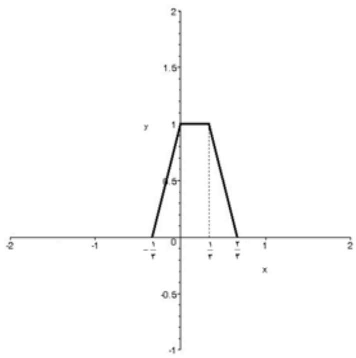
مثال: اگر نمودار تابع $y=f\left(x\right)$ به صورت زیر باشد نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه‌ی آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y=f\left(۳x\right)$ ب) $y=f\left(-۳x\right)$ ج) $y=f\left(-۳x+۱\right)$



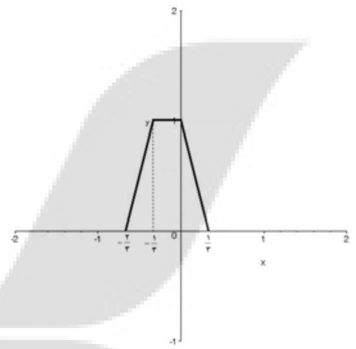
حل: با توجه به دستورالعمل‌های گفته شده مراحل زیر را خواهیم داشت.

الف) نمودار $y = f(۳x)$



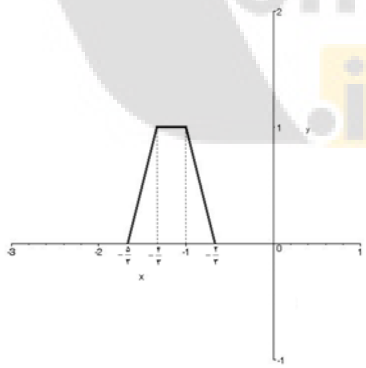
دامنه‌ی این تابع با توجه به شکل بازه $[-\frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{۲}{۳}]$ است.

ب) نمودار $y = f(-۳x)$



دامنه‌ی این تابع با توجه به شکل بازه $[-\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۳}]$ است.

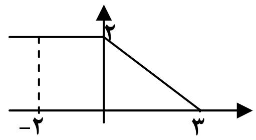
ج) نمودار $y = f(-۳x+۱)$



دامنه‌ی این تابع با توجه به شکل بازه $[-\frac{۵}{۳}, -\frac{۲}{۳}]$ است.

تمرین:

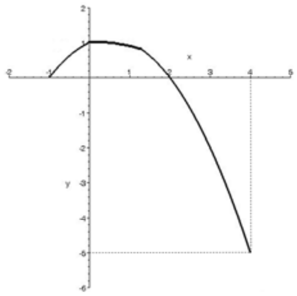
۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(x) - 1$ ب) $y = -f(x)$ ج) $y = 2f(3x)$

د) $y = f(-x)$ هـ) $y = 3f(2x+1)$ و) $y = f(\frac{x}{2}) + 2$

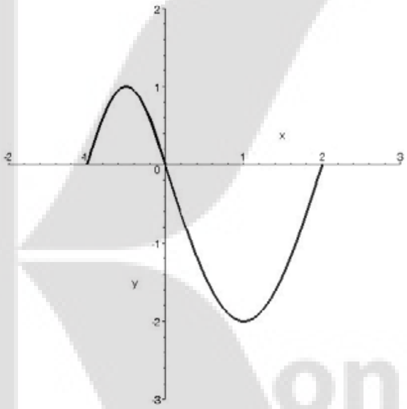
۲- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(x-1)$ ب) $y = 2f(-\frac{x}{2})$ ج) $y = -2f(3x)$

د) $y = 2f(-3x)$ هـ) $y = -2f(-3x)$ و) $y = -2f(1-x) + 1$

۳- اگر نمودار تابع $y = f(x+2)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(x)$ ب) $y = f(x-2)$ ج) $y = f(-\frac{1}{2}x + 1)$

د) $y = f(|x|)$ هـ) $y = |f(x)|$ و) $y = |f(-|x|)|$

۴- اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,-4)\}$ مطلوب است تعیین تابع $y = 3f(\frac{x}{2} - 1)$.

۵- اگر دامنه و برد تابع $y = 3f(\frac{x}{2})$ به ترتیب بازه‌های $[-1,2)$, $[-4,1)$ باشند دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = f(x)$ ب) $y = -f(1-3x)$

۶- برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ بازهٔ $(-3,1]$ است. برد تابع f را بیابید.

۷- اگر $D_f = [-2,3]$ و $R_f = (-4,2)$ باشد، دامنه و برد تابع $y = 2f(-\frac{1}{2}x + 2) + 3$ را بیابید.

اعمال جبری روی توابع

برای دو تابع f , g تابع $f+g$ روی $D_f \cap D_g$ تعریف می‌شود و برای هر مقدار x در $D_f \cap D_g$ داریم $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ به طور مشابه توابع $f-g$ و $f.g$ نیز روی $D_f \cap D_g$ تعریف می‌شود و به ازای هر $x \in D_f \cap D_g$ داریم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f.g)(x)=f(x)\,.\,g(x)$$

و تابع $\frac{f}{g}$ نیز به ازای $x \in D_f \cap D_g - \{x|g(x)=۰\}$ تعریف می‌شود و به ازای هر عدد x در این مجموعه داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: مدرسه علی تاکنون از دانش‌آموزان ۲ مرحله آزمون گرفته است. در مرحله اول دروس مورد آزمون عبارتند از: حسابان، هندسه، فیزیک، شیمی، ادبیات و دروس آزمون مرحله دوم عبارتند از: حسابان، جبر و احتمال، فیزیک، ادبیات و زبان انگلیسی. نمرات علی بر حسب درصد چنین است:

مرحله اول **f =** {(حسابان , ۷۰), (هندسه , ۵۶), (فیزیک , ۶۸), (شیمی, ۷۹), (ادبیات, ۸۵)}

مرحله دوم **g =** {(حسابان, ۷۴), (جبرواحتمال, ۵۶), (فیزیک, ۶۸), (ادبیات, ۷۹), (زبان‌انگلیسی , ۸۵)}

حل: اگر تابع مربوط به اختلاف نمرات مرحله دوم از مرحله اول را بنویسیم این تابع تنها برای دروسی با معنی است که در هر دو آزمون مورد سنجش واقع شده‌اند، یعنی:

$g-f$ = {(حسابان , ۴), (فیزیک , ۰), (ادبیات , −۶)}

و با مشاهده این تابع مشخص است که وی در درس حسابان پیشرفت، در فیزیک بدون تغییر و در ادبیات دچار افت شده است.

مثال: فرض کنید $f(x)=۲x+۵$ و $g=\{(-۱\,,\,۳)\,,\,(۰\,,\,-۵)\,,\,(۴\,,\,۰)\,,\,(-۲/۵\,,\,۱)\,,\,(۳\,,\,۲)\}$

توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $g-f$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

حل: دامنه تابع f ، مجموعه $\Re$ و دامنه تابع g مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ است. لذا دامنه توابع $f+g$ و $f-g$ و $g-f$ و $f.g$ مجموعه حاصل از اشتراک این دو مجموعه یعنی مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ است. هم‌چنین $f(۳)=۱۱$ ، $f(-۲/۵)=۰$ ، $f(۴)=۱۳$ ، $f(۰)=۵$ و $f(-۱)=۳$.

بنابراین:

$$f+g=\{(-۱\,,\,۶)\,,\,(۰\,,\,۰)\,,\,(۴\,,\,۱۳)\,,\,(-۲/۵\,,\,۱)\,,\,(۳\,,\,۱۳)\}$$

$$f-g=\{(-۱\,,\,۰)\,,\,(۰\,,۱۰)\,,\,(۴\,,\,۱۳)\,,\,(-۲/۵\,,\,-۱)\,,\,(۳\,,\,۹)\}$$

$$g-f=\{(-۱\,,\,۰)\,,\,(۰\,,-۱۰)\,,\,(۴\,,\,-۱۳)\,,\,(-۲/۵\,,-۱)\,,\,(۳\,,\,-۹)\}$$

$$f.g=\{(-۱\,,\,۹)\,,\,(۰\,,\,-۲۵)\,,\,(۴\,,\,۰)\,,\,(-۲/۵\,,\,۰)\,,\,(۳\,,\,۲۲)\}$$

همچنین دامنه تابع $\frac{f}{g}$ مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ به جز اعضایی که خروجی g به ازای آن‌ها صفر است؛ یعنی عضو ۴، چون $g(۴)=۰$. لذا دامنه آن، مجموعه $\{-۱,۰,-۲/۵,۳\}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{f}{g}=\left\{(-۱,۱),(۰,-۱),(-۲/۵,۰),(۳,\frac{۱۱}{۲})\right\}$$

دامنه تابع $\frac{g}{f}$ مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ به جز اعضایی که خروجی f به ازای آن‌ها صفر است؛ یعنی عضو $-\frac{۵}{۲}$، چون $f(-\frac{۵}{۲})=۰$. لذا دامنه آن مجموعه $\{-۱,۰,۴,۳\}$ بنابراین:

$$\frac{g}{f}=\left\{(-۱,۱),(۰,-۱),(۴,۰),(۳,\frac{۲}{۱۱})\right\}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x^{۲}+۲x}{۲-x}}$ ضابطه و دامنه توابع $g+f$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

حل: دامنه تابع f مجموعه $D_f=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ است و دامنه تابع g مجموعه $Dg=(-\infty,-۲]\cup[۰,۲)$ است. بنابراین:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}+\sqrt{\frac{x^{۲}+۲x}{۲-x}}\quad,\quad D_{f+g}=(-\infty,-۲]$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}+\sqrt{\frac{x^{۲}+۲x}{۲-x}}\quad,\quad D_{f-g}=(-\infty,-۲]$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}\,.\,\sqrt{\frac{x^{۲}+۲x}{۲-x}}\quad,\quad D_{f.g}=(-\infty,-۲]$$

این تابع با تابع $h(x)=|x+۲|\sqrt{-x}$ که به دامنه $(-\infty,-۲]$ تحدید (محدود) شده باشد برابر است. (واضح است بدون تحدید دو تابع برابر نیستند.)

تابع g به ازای $x=۰$ و $x=-۲$ صفر خواهد شد لذا تابع $\frac{f}{g}$ عبارتست از:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x^{۲}-۴}}{\sqrt{\frac{x^{۲}+۲x}{۲-x}}}\quad,\ D_{\frac{f}{g}}=(-\infty,-۲)$$

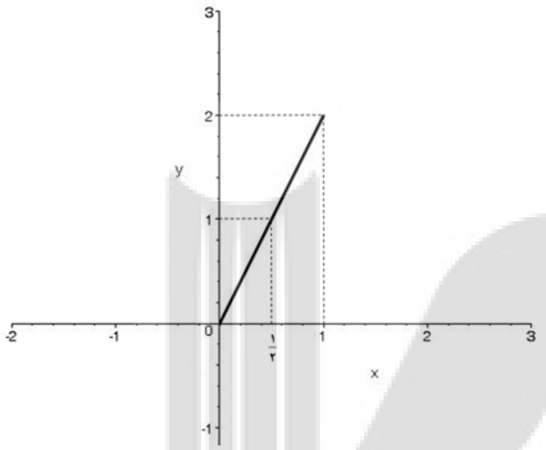
این تابع با تابع $k(x)=\frac{|x-۲|}{\sqrt{-x}}$ وقتی که دامنه آن به مجموعه $(-\infty,-۲)$ تحدید شده باشد برابر است.

همچنین تابع g به ازای $x=۲$ و $x=-۲$ صفر خواهد شد لذا

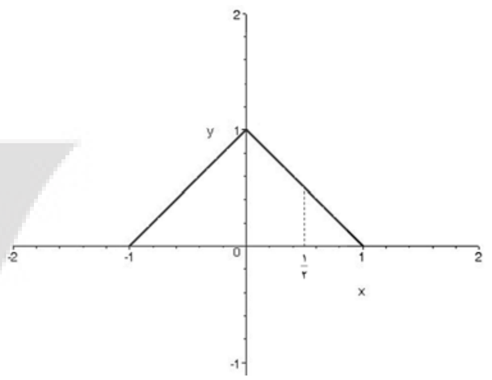
$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{\dfrac{x^{۲}+۲x}{۲-x}}}{\sqrt{x\ \ -۴}}\quad , D_{\frac{g}{f}}=(-\infty\ ,-۲)$$

و این تابع با تابع $m(x)=\dfrac{\sqrt{-x}}{|x-۲|}$، وقتی دامنه آن به مجموعه $(-\infty\ ,-۲)$ تحدید شده باشد برابر است.

مثال: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ را رسم کنید.



g



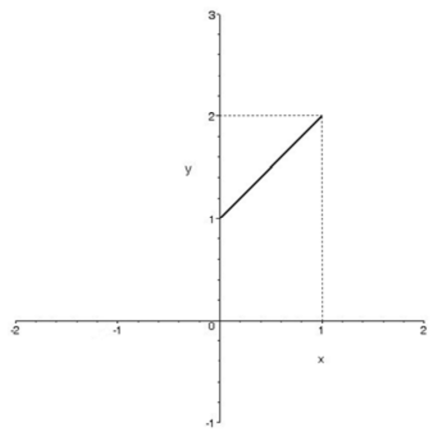
f

حل: با توجه به شکل تابع f در فاصله $[-۱\ ,۱]$ تعریف شده است و تابع g در $[۰\ ,\infty)$. لذا توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ در فاصله $[۰,۱]$ تعریف شده‌اند.

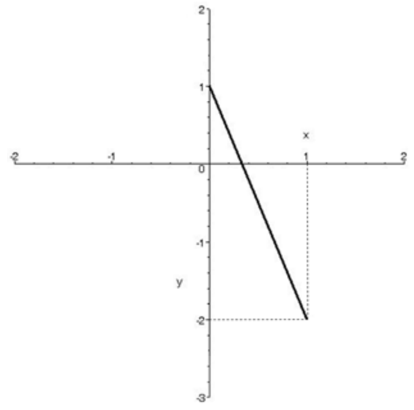
برای رسم $f+g$ کافی است $(f+g)(x)$ را به ازای هر مقدار $۰\le x\le ۱$ را محاسبه کنیم یعنی مقادیر f و g را در هر یک محاسبه نمود و با هم جمع کرد. مثلاً:

$$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=۱+۰=۱$$
$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۰+۲=۲$$
$$(f+g)\left(\frac{۱}{۲}\right)=f\left(\frac{۱}{۲}\right)+g\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

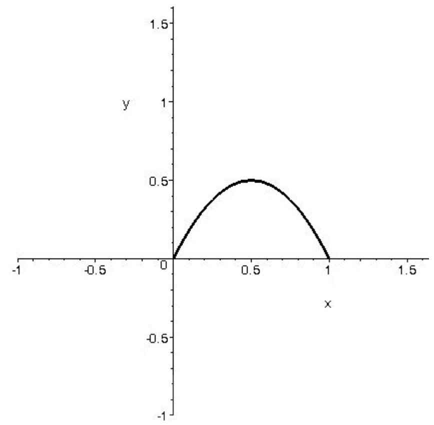
لذا شکل $f+g$ به طور تقریبی چنین خواهد بود.



به طور مشابه مقادیر $f-g$ را به ازای هر $۰ \le x \le ۱$ از تفاضل مقدار تابع g از f و g . f را به ازای هر $۰ \le x \le ۱$ از ضرب مقادیر توابع f و g به دست می‌آوریم. نمودارهای تقریبی به صورت زیر است:



$f-g$



$f \, . \, g$

تمرین:

۱- توابع f و g به صورت:

$$f=\{(۱\,,۴)\,,(۰\,,۲)\,,(-۲\,,۱)\,,(۴\,,۰)\,,(۵\,,۰)\}$$

و

$$g=\{(۱\,,۰)\,,(۰\,,۳)\,,(۴\,,-۱)\,,(۵\,,۰)\,,(۷\,,۱)\}$$

تعریف می‌شوند. مطلوب است تعیین توابع:

الف) $\dfrac{g}{f}$ ب) $\dfrac{۲f}{g^۲}$

ج) $\dfrac{۱}{۳}f+\dfrac{۱}{g+۲}$ د) $f \, . \, g-\dfrac{g}{f}$

۲- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۳x+۲}$، ضابطه و دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{f}{g}$ ب) $f \, . \, g$

ج) $f^۲$ د) $y=\dfrac{f(۲x)}{g(۱)-۲}$

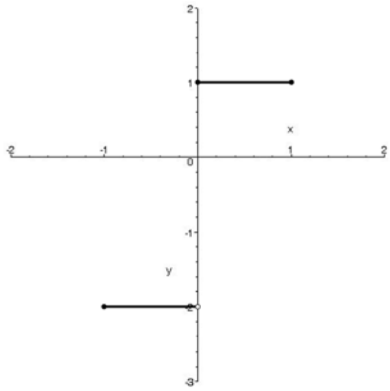
۳- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۲}$، ضابطه و دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f+g$ ب) $\dfrac{۱}{f}+۳g$

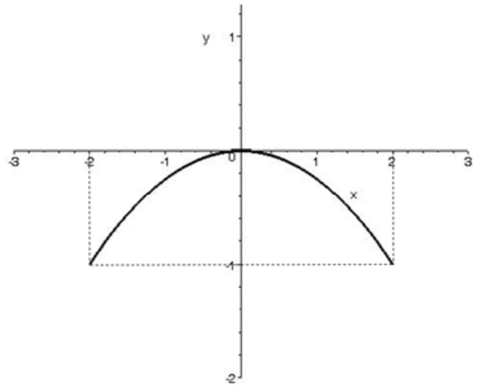
ج) $f.g$ د) $\dfrac{f}{۲g}\,.-\dfrac{g}{۲f}$

۴- اگر $f(x)=\sqrt{۳x-۳}$ و $g(x)=\sqrt{۳-۶x}$ و $h(x)=x^۲-۳x+۲$ ضابطه و دامنه تابع $\dfrac{f+g}{h}$ را بیابید.

۵- اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشند، مطلوب است رسم نمودار توابع زیر:



g



f

الف) $f+g$ ب) $f.g$ ج) $\frac{f}{g}$

د) $\frac{g}{f}$ هـ) $\frac{۱}{f}$ و) $\frac{-۲}{g}$

ز) $۲f-۳g$ ح) $\frac{۱}{g}+f$

۶- یک واحد تولیدی کالایی که c تومان هزینه داشته است را به قیمت $R(c)=۵۰+\frac{۱}{۲}c$ می‌فروشد هم‌چنین خریدار باید $\frac{۱}{۱۰}$ قیمت خرید را به عنوان مالیات بر ارزش افزوده بپردازد.

الف) ضابطه تابع M، مالیات برارزش افزوده را بنویسید.

ب) ضابطه تابع K، قیمت نهایی خرید کالا را به صورت تابعی از هزینه تمام شده، بنویسید.

ج) قیمت کالایی که هزینه تمام شده آن ۲۰۰۰۰ تومان است چقدر است؟

د) اگر قیمت نهایی خرید یک کالا ۵۰۰۰ تومان باشد هزینه تمام شده کالا چقدر است؟

ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند، تابع fog تابعی است که از ترکیب دو تابع بوجود می‌آید که اعضای آن زوج مرتب‌هایی از $(x\ ,\ y)$ هستند که x در دامنه g قرار دارد و $g(x)$ هم در دامنه f می‌باشد و y مقدار تابع f به ازای $g(x)$ می‌باشد. یعنی:

$$x \longrightarrow \overset{g}{\boxed{}} \xrightarrow{(g(x))} \overset{f}{\boxed{}} \longrightarrow f(g(x))$$

به عبارت دیگر

$$fog=\{(x\ ,\ y)\mid x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\ \ ,\ y=f(g(x))\}$$

مثال: توابع f و g به صورت:

$$\boldsymbol{g=\{(۱\ ,\ ۳)\ ,\ (۳\ ,\ ۵)\ ,\ (۵\ ,\ ۷)\ ,\ (۷,۱)\}} \quad \text{و} \quad f=\{(۱\ ,\ ۲)\ ,\ (۲\ ,\ ۳)\ ,\ (۳\ ,\ ۴)\ ,\ (۴\ ,\ ۵)\ ,\ (۶\ ,\ ۷)\}$$

تعریف شده‌اند. مطلوب است تعیین توابع fog و gof.

حل: برای تعیین تابع fog دقت می‌کنیم که اعضای دامنه تابع fog اعضایی از دامنه تابع g می‌باشد که $g(x)$ در دامنه f قرار داشته باشد. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱\in D_g\ ,\ g(۱)=۳\ ,\ ۳\in D_f\ \Rightarrow ۱\in D_{fog} \\ ۳\in D_g\ ,\ g(۳)=۵\ ,\ ۵\notin D_f\ \Rightarrow ۳\notin D_{fog} \\ ۵\in D_g\ ,\ g(۵)=۷\ ,\ ۷\notin D_f\ \Rightarrow ۵\notin D_{fog} \\ ۷\in D_g\ ,\ g(۷)=۱\ ,\ ۱\in D_f\ \Rightarrow ۷\in D_{fog} \end{array}\right\}\Rightarrow D_{fog}=\{۱\ ,\ ۷\}$$

و لذا

$$\left.\begin{array}{l} fog(۱)=f(g(۱))=f(۳)=۴ \\ fog(۷)=f(g(۷))=f(۱)=۲ \end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(۱\ ,\ ۴)\ ,\ (۷\ ,\ ۲)\}$$

به طور مشابه برای تعیین تابع gof، اعضای دامنه تابع gof اعضایی از دامنه تابع f هستند که $f(x)$ در دامنه g قرار دارند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱\in D_f\quad ,\quad f(۱)=۲\quad ,\quad ۲\notin D_g\rightarrow ۱\notin D_{gof} \\ ۲\in D_f\quad ,\quad f(۲)=۳\quad ,\quad ۳\in D_g\rightarrow ۲\in D_{gof} \\ ۳\in D_f\quad ,\quad f(۳)=۴\quad ,\quad ۴\notin D_g\rightarrow ۳\notin D_{gof} \\ ۴\in D_f\quad ,\quad f(۴)=۵\quad ,\quad ۵\in D_g\rightarrow ۴\in D_{gof} \\ ۶\in D_f\quad ,\quad f(۶)=۷\quad ,\quad ۷\in D_g\rightarrow ۶\in D_{gof} \end{array}\right\}\Rightarrow D_{gof}=\{۲,۴,۶\}$$

و لذا

$$\left.\begin{array}{l} gof(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۵ \\ gof(۴)=g(f(۴))=g(۵)=۷ \\ gof(۶)=g(f(۶))=g(۷)=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow gof=\{(۲,۵),(۴,۷),(۶,۱)\}$$

مثال: فرض کنید $g(x)=\sqrt{x}+۱$ و $f=\{(-۲,۰),(۰\ ,\ ۱)\ ,\ (\ ۱\ ,\ ۴)\ ,\ (۲\ ,\ -۵)\}$. مطلوب است تعیین توابع **fog** و **gof**.

حل: تعیین تابع fog :

دامنه آن اعضایی از دامنه g، $\{x|x\geq ۰\}$ می‌باشد که:

$$g(x)\in D_f=\{-۲,۰,۱,۲\}$$

$g(x)=-۲\Rightarrow \sqrt{x}+۱=-۲\Rightarrow \sqrt{x}=-۳$ غیرممکن

$g(x)=۰\Rightarrow \sqrt{x}+۱=۰\Rightarrow \sqrt{x}=-۱$ غیرممکن

$$g(x)=۱\Rightarrow \sqrt{x}+۱=۱\Rightarrow \sqrt{x}=۰\Rightarrow x=۰$$
$$g(x)=۲\Rightarrow \sqrt{x}+۱=۲\Rightarrow \sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱$$

پس از اعضای دامنه تابع g تنها دو عضو ۰ و ۱ در دامنه تابع fog وجود دارند و داریم.

$$fog(۰)=f(g(۰))=f(۱)=۴$$
$$fog(۱)=f(g(۱))=f(۲)=-۵$$

یعنی:

$$fog=\{(۰,۴),(۱,-۵)\}$$

تعیین تابع gof:

دامنه آن اعضایی از دامنه تابع f، $\{-۲,۰,۱,۲\}$ هستند که $f(x)\in D_g=\{x|\ x\geq ۰\}$ اما:

$$f(-۲)=۰\quad,\quad ۰\in D_g\Rightarrow -۲\in D_{gof}$$
$$f(۰)=۱\quad,\quad ۱\in D_g\Rightarrow ۰\in D_{gof}$$
$$f(۱)=۴\quad,\quad ۴\in D_g\Rightarrow ۱\in D_{gof}$$
$$f(-۵)=۰\quad,\quad -۵\in D_g\Rightarrow ۲\notin D_{gof}$$

پس از اعضای دامنه تابع f تنها سه عضو ۲-، ۰ و ۱ در دامنه تابع gof حضور دارند و داریم.

$$gof(-۲)=g(f(-۲))-g(۰)=۱$$
$$gof(۰)=g(f(۰))=g(۱)=۲$$
$$gof(۱)=g(f(۱))=g(۴)=۳$$

یعنی

$$gof=\{(-۲,۱),(۰,۲),(۱,۳)\}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ مطلوب است تعیین دامنه و برد توابع fog و gof.

حل:

تعیین تابع fog :

دامنه تابع g مجموعه $D_g=\{x|\ -۱\leq x\leq ۱\}$ است اما $g(x)$ باید در دامنه تابع f باشد و $D_f=\{x|\ x\neq ۰\}$. پس $g(x)$ نباید صفر شود. اما $g(x)$ در ۱- و ۱ صفر می‌شود. پس $D_{fog}=\{x|\ -۱<x<۱\}$ و به ازای این xها داریم $fog(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{۱-x^۲}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$.

تعیین تابع gof:

دامنه تابع gof عضوهایی از مجموعه $\{x|\ x\neq ۰\}$ می‌باشد که $f(x)\in D_g$ باشد یعنی $-۱\leq f(x)\leq ۱$ یا $-۱\leq \frac{۱}{x}\leq ۱$ یعنی $D_{gof}=(-\infty\ ,-۱]\cup[۱\ ,\infty)$. پس با در نظر گرفتن هر دو شرط، دامنه gof مجموعه $(-\infty\ ,-۱]\cup[۱\ ,\infty)$ می‌باشد و به ازای این xها داریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g(\frac{۱}{x})=\sqrt{۱-(\frac{۱}{x})^۲}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=\frac{x}{۲-x}$ مطلوب است تعیین دامنه و برد تابع fof.

حل: دامنه تابع f مجموعه $\Re-\{۲\}$ است. بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f\ \mid f(x)\in D_f\}=\left\{x\neq ۲\ \middle|\ \frac{x}{۲-x}\neq ۲\right\}$$

اما

$$\frac{x}{۲-x}=۲\Rightarrow x=۴-۲x\Rightarrow ۳x=۴\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

لذا

$$D_{fof}=\left\{x\neq ۲\ ,\ x\neq \frac{۴}{۳}\right\}=(-\infty\ ,\frac{۴}{۳})\cup(\frac{۴}{۳}\ ,۲)\cup(۲\ ,+\infty)$$

هم‌چنین

$$fof(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{۲-x}\right)=\frac{\frac{x}{۲-x}}{۲-\frac{x}{۲-x}}$$

توجه کنید که اگر این ضابطه را ساده کنیم حتماً باید شرط دامنه را قید کنیم در غیر این صورت تابع حاصل با تابع fof برابر نخواهد بود.

$$fof(x)=\frac{x}{۴-۳x}\quad ,\quad x\neq \frac{۴}{۳}\ ,۲$$

البته شرط $x\neq \frac{۴}{۳}$ از ضابطه واضح است اما شرط $x\neq ۲$ حتماً باید قید شود.

مثال: در پرتاب جسم با سرعت اولیه $v_۰$ در راستای قائم ارتفاع جسم بر حسب زمان از رابطه‌ی $h(t)=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۰t$ به دست می‌آید که در آن g ثابت و شتاب ثقل می‌باشد. هم‌چنین سرعت جسم بر حسب t از رابطه $v(t)=v_۰+gt$ به دست می‌آید. تابع ارتفاع جسم را برحسب متغیر v (سرعت جسم) بیابید.

حل: داریم

$$v=v_۰+gt\Rightarrow t=\frac{v-v_۰}{g}\Rightarrow t(v)=\frac{v-v_۰}{g}$$

حال از ترکیب توابع $h(t)$ و $t(v)$ به تابع $h(t(v))$ می‌رسیم. بنابراین:

$$h(t(v))=\frac{۱}{۲}g(\frac{v-v_۰}{g})^۲+v_۰(\frac{v-v_۰}{g})\Rightarrow h(t(v))=\frac{v^۲-v_۰^۲}{۲g}$$

مثال: دامنه تابع $h(x)=\sqrt{\sqrt{۳x-۴}-۶x+۸}$ را بیابید.

حل: اگر قرار دهیم $g(x)=۳x-۴$ و $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-۲x}$ آن‌گاه $h=fog$ و داریم $D_f=[۰,\frac{۱}{۴}]$.

پس

$$D_h=D_{fog}\{x\in D_g \mid f(x)\in D_f\}=\left\{x\in\Re \mid ۰\le x\le\frac{۱}{۴}\right\}=[۰,\frac{۱}{۴}]$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x<۱\\ x+۱ & x\ge ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۵x & x\le ۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ ضابطه تابع fog را بیابید.

حل: توجه کنید که x ابتدا به تابع g رفته و خروجی آن وارد تابع f می‌شود. حال اگر $x>۰$ را بعنوان ورودی تابع g در نظر بگیریم خروجی آن عدد ۱ می‌باشد حال ۱ ورودی f را تشکیل می‌دهد که خروجی f به ازای $x=۱$ برابر $۱+۱=۲$ می‌باشد. این مطلب را چنین نمایش می‌دهیم:

$$x>۰\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۱+۱=۲$$

حال اگر $x\le ۰$ ورودی تابع g باشد خروجی آن $-۵x$ است. اگر $-۵x<۱$ باشد، خروجی تابع f، $(-۵x)^۲=۲۵x^۲$ است و اگر $-۵x\ge ۱$ باشد خروجی تابع f، $-۵x+۱$ است یعنی:

$$x\le ۰\ \nearrow\ -\frac{۱}{۵}<x\le ۰\xrightarrow{g}-۵x\xrightarrow[-۵x<۱]{f}(-۵x)^۲=۲۵x^۲$$
$$x\le ۰\ \searrow\ x\le-\frac{۱}{۵}\xrightarrow{g}-۵x\xrightarrow[-۵x\ge ۱]{f}-۵x+۱$$
$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}-۵x+۱ & x\le-\frac{۱}{۵}\\ ۲۵x^۲ & -\frac{۱}{۵}<x\le ۰\\ ۲ & x>۰\end{cases}$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x}+۱$ و $fog(x)=\sqrt{x^۲-۱}+۱$، تابع $g(x)$ را بیابید.

حل: داریم

$$f(x)=\sqrt{x}+۱\Rightarrow f(g(x))=\sqrt{g(x)}+۱$$

از سوی دیگر

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{x^۲-۱}+۱$$

لذا $\sqrt{g(x)}+۱=\sqrt{x^۲-۱}+۱$ و در نتیجه $\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^۲-۱}$ یا $g(x)=x^۲-۱$.

مثال: اگر $fog(x)=f(g(x))=\sqrt{\sin^۴x+۲\sin^۲x+۲}=\sqrt{(\sin^۲x+۱)^۲+۱}=\sqrt{g^۲(x)+۱}$

حالا با قرار دادن x به جای $g(x)$ در تساوی‌ها داریم $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$.

تمرین:

۱- فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x^۲-۴}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$، ضابطه توابع fog و gof را بیابید، سپس به کمک تعریف، دامنه هر یک را بیابید.

۲- فرض کنید $f(x)=\sqrt{x^۲+x}$ و $g(x)=۲\sqrt{x}$، ضابطه تابع fog را بیابید، سپس به کمک تعریف، دامنه آن را بیابید.

۳- فرض کنید $f(x)=\sqrt{۱-۲x}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{x+۳}$، دامنه تابع fog را به کمک تعریف بیابید.

۴- اگر $f(x)=۱-\frac{x}{۲}$ و $g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)$، ضابطه تابع $(g+۲f)of$ را بیابید.

۵- اگر $f(x)=\sqrt{۲x+۶}$ و $Dg=[-۲\,,\,۴]$ دامنه تابع gof را بیابید.

۶- اگر $\begin{cases} f:[۱\,,\,۴]\to\Re \\ f(x)=۲x-۳ \end{cases}$ و $\begin{cases} g:[-۲,\,۴]\to\Re \\ g(x)=۱-۲x \end{cases}$ دامنه تابع gof را بیابید.

۷- اگر $f=\{(۱\,,\,۲),(۳\,,\,-۱),(۴\,,\,-۱),(-۱\,,\,۰)\}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$ توابع fog و gof و fof را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

۸- $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ ضابطه و دامنه توابع gof، gog و $fo(۲f)$ را بیابید.

۹- اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{۲x+۱}$ ضابطه و دامنه توابع gof، fog و fof را بیابید.

۱۰- اگر $f=\{(۱\,,\,۲),(۳\,,\,a),(۴\,,\,-۱),(a\,,a+۱)\}$ و $fof(۳)=۰$ مقدار a را بیابید.

۱۱- اگر $f(x)=۳x+۳$ و $g(x)=۲x^۲+۱$ معادله $fog(x)=۰$ را حل کنید.

۱۲- اگر $f(x)=x^۳$ و $g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)$ ضابطه $g(۱-t^۲)$ را بیابید.

۱۳- اگر $fog(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x}{x+۱}$ ضابطه تابع f را بیابید.

۱۴- اگر $fog(x)=-f(x)$ و $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ ضابطه تابع g را بیابید.

۱۵- اگر $f(x)=x^۲+x$ و $fog(x)=x+۱$ و برد تابع g شامل هیچ عدد مثبتی نباشد ضابطه تابع g را بیابید.

۱۶- اگر $f(x)=x^۲-۲x$ و $fog(x)=x$ و $Df=[۱\,,\,\infty]$ ضابطه تابع g را بیابید.

۱۷- در حرکت پرتابی در امتداد افق با سرعت اولیه $v.$ فاصله افقی جسم از مبدأ برحسب زمان در هر لحظه از رابطه $x(t)=\text{v.t}$ به دست می‌آید و فاصله عمود آن از مبدأ بر حسب زمان از رابطه $y(t)=\frac{۱}{۲}gt^۲$ (g شتاب ثقل است) تابع $yox(t)$ را به دست آورید و آن را تعبیر کنید.

مجموعه‌های متقارن

❖ **مجموعه‌ی $A \subseteq \Re$ را متقارن گوییم هر گاه به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $-x \in A$.**

مثال: مجموعه‌ی $A = \{-۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲\}$ متقارن نیست، زیرا $-۳ \in A$ ولی $۳ \notin A$.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{-۱ , ۲\}$ متقارن نیست، زیرا $۲ \in A$ ولی $-۲ \notin A$.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{-۲ , ۲\}$ متقارن است زیرا هر عضوی از A انتخاب کنیم قرینه‌ی آن عضو نیز در A وجود دارد.

مثال: مجموعه‌ی A که به صورت زیر، روی محور نمایش داده شده، متقارن نیست، زیرا $-۲ \in A$ **ولی** $۲ \notin A$.

تمرین:

کدام یک از مجموعه‌های زیر متقارن است.

الف) $\{x \mid x = ۲k , k \in z\}$ ب) $(-\infty , ۴]$

ج) $\Re - [-۲ , ۲)$ د) $\{x \mid \frac{۱}{x} < ۱\}$

هـ) $\Re - \{x \mid x^۳ - x = ۰\}$ و) $\{x \mid ۳^x \neq ۲^x\}$

ز) $\{x \mid \sqrt{\frac{x^۲ + ۱}{۴ - x^۲}} \in \Re\}$ ح) $\{x \mid ۲ < |x| < ۳\}$

ط) $\{x \in \Re \mid x \geq x^۲\}$

توابع زوج و فرد

❖ **تابع f با دامنه‌ی متقارن را زوج گوییم، هر گاه به ازای هر $x \in D_f$، تساوی $f(-x) = f(x)$ برقرار باشد.**

❖ **تابع f با دامنه‌ی متقارن را فرد گوییم، هر گاه به ازای هر $x \in D_f$، تساوی $f(-x) = -f(x)$ برقرار باشد.**

مثال: **زوج** یا فرد بودن تابع $f = \{(-۳ , -۱) , (۲ , ۳) , (-۲ , ۳) , (۱ , ۳)\}$ را بررسی کنید.

حل: چون $D_f=\{-۳\,,-۲\,,۲\,,۳\}$، لذا دامنه f متقارن است. $f(-۳)=-f(۳)$ ولی $f(-۲)=f(۲)$ بنابراین تابع f نه زوج است و نه فرد.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۳}$ را بررسی کنید.

حل: داریم $D_f=\Re-\{۳\}$ و $-۳\in D_f$ ولی $۳\notin D_f$، پس دامنه‌ی تابع f متقارن نیست. بنابراین تابع f نه زوج است نه فرد.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-|x|}{x^۲+۱}$ را بررسی کنید.

حل: داریم $D_f=\Re$ و لذا دامنه f متقارن است و

$$f(-x)=\frac{(-x)^۲-|-x|}{(-x)^۲+۱}=\frac{x^۲-|x|}{x^۲+۱}=f(x)$$

بنابراین f تابعی زوج است.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)$ را بررسی کنید.

حل: با توجه به $x^۲+۱\geq ۱$ و این که $\sqrt{x^۲+۱}\geq -x \Rightarrow x+\sqrt{x^۲+۱}>۰$ همواره برقرار است، دامنه‌ی f برابر $\Re$ است و لذا متقارن است و

$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{(-x)^۲+۱})=\log\left(\frac{(\sqrt{x^۲+۱}-x)(\sqrt{x^۲+۱}+x)}{\sqrt{x^۲+۱}+x}\right)$$
$$=\log\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}+x}=\log ۱-\log(\sqrt{x^۲+۱}+x)=-f(x)$$

بنابراین f تابعی فرد است.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\begin{cases}x^۴-۲x & x\geq ۰\\ x^۴+۲x & x<۰\end{cases}$ را بررسی کنید.

حل: $D_f=\Re$ و لذا دامنه f متقارن است.

حالت اول: $x=۰\Rightarrow f(۰)=۰$.

حالت دوم: اگر $x<۰$ آنگاه $-x>۰$ و داریم:

$$f(-x)=(-x)^۴+۲(-x)=x^۴-۲x=f(x)$$

بنابراین f تابعی زوج است.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=|x-۲|-|x+۲|$ را بررسی کنید.

حل: $D_f=\Re$ و لذا دامنه f متقارن است و

$$f(-x)=|-x-۲|-|-x+۲|=|-(x+۲)|-|-(x-۲)|=|x+۲|-|x-۲|$$
$$=-(|x-۲|-|x+۲|)=-f(x)$$

بنابراین f تابعی فرد است.

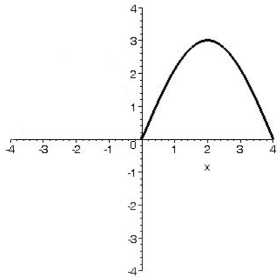
مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ را بررسی کنید.

حل: $D_f = \Re$ و لذا دامنه f متقارن است و

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$$

واضح است که $f(-x)\neq f(x)$ و $f(-x)\neq -f(x)$ پس تابع f نه زوج است و نه فرد.

مثال: قسمتی از نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-۴ , ۴]$ به صورت



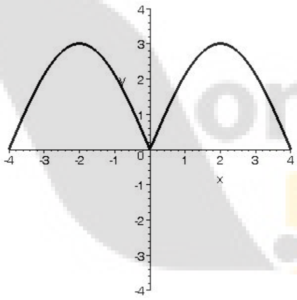
رسم شده است، نمودار تابع را طوری کامل کنید تا:

الف) f تابعی زوج را نمایش دهد.

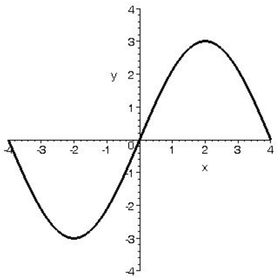
ب) f تابعی فرد را نمایش دهد.

حل:

الف) می‌دانیم نمودار تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است. پس لازم است نمودار f به صورت مقابل باشد.



ب) می‌دانیم نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. پس لازم است نمودار f به صورت مقابل باشد.



مثال: ثابت کنید تنها تابعی که هم زوج است و هم فرد، تابع ثابت صفر با دامنه‌ی متقارن است.

حل: فرض کنیم f تابعی با دامنه‌ی متقارن باشد، آنگاه به ازای هر $x\in D_f$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f \Rightarrow f(-x)=f(x) \text{ تابعی زوج است} \\ f \Rightarrow f(-x)=-f(x) \text{ تابعی فرد است} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-f(x) \Rightarrow f(x)=0$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=cx^3+(a-3)x^2-2bx+b+4$ داده شده است.

الف) به ازای چه مقادیری از a و b تابع f زوج است.

ب) به ازای چه مقادیری از a و b تابع f فرد است.

حل: واضح است که $D_f=\Re$.

الف)

$$f(-x)=f(x) \Rightarrow -cx^3+(a-3)x^2+2bx+b+4=cx^3+(a-3)x^2-2bx+b+4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=-c \\ 2b=-2b \\ a-3=a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a\in\Re \end{cases}$$

توجه: برای زوج بودن تابع چند جمله‌ای f لازم است تنها جملات با درجه‌ی زوج وجود داشته باشند.

ب)

$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow -cx^3+(a-3)x^2+2bx+b+4=-cx^3-(a-3)x^2+2bx-b-4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-3=-(a-3) \\ b+4=-b-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

توجه: برای فرد بودن تابع چند جمله‌ای f، لازم است در ضابطه‌ی آن تنها جملات با درجه‌ی فرد وجود داشته باشند.

مثال: اگر f و g هر دو فرد باشند، زوج یا فرد بودن تابع $\frac{f}{g}$ را بررسی کنید.

$$x \in D_{\frac{f}{g}} \text{ دلخواه} \Rightarrow x \in D_f \cap D_g : g(x)\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f \\ x\in D_g \Rightarrow -x\in D_g \end{array}\right\} \Rightarrow -x\in D_f\cap D_g \\ g(-x)=-g(x)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x\in D_{\frac{f}{g}}$$

بنابراین دامنه تابع $\frac{f}{g}$ متقارن است و داریم:

$$\frac{f}{g}(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{-f(x)}{-g(x)}=\frac{f}{g}(x)$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ تابع زوج است.

تمرین:

۱- زوج یا فرد بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{-\sin^{۲}\pi x}$ ب) $f(x)=\cos(۲x)$

ج) $f(x)=\tan x$ د) $f(x)=\tan x+۱$

هـ) $f(x)=\tan(\sin x)$ و) $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}+\sqrt[۳]{x+۱}$

ز) $f(x)=\frac{۳}{۲^{x}-۴}$ س) $f(x)=\frac{۲^{x}-۱}{۲^{x}+۱}$

ط) $f(x)=\log\frac{x+۱}{x-۱}$ ظ) $f(x)=۳^{-x}(۳^{x}+۱)^{۴}$

ش) $f(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}$ ی) $f(x)=x\sin x$

ت) $f(x)=\frac{x+۵}{x^{۴}-۳x^{۲}+۲}$ پ) $f(x)=\frac{x+۱}{x^{۲}+۴x-۵}$

۲- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax & x\le -۱ \\ cx & -۱<x<۱ \\ bx^{۲}+x & x\ge ۱ \end{cases}$ تابعی زوج باشد، مقادیر a و b و c را تعیین کنید.

۳- اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ ، تابع $g(x)=(fof)(x)$ زوج است یا فرد؟ چرا ؟

۴- زوج یا فرد بودن تابع $y=\frac{-\sqrt[۳]{x^{۲}}+x}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ را بررسی کنید.

۵- زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\in Q \\ -۱ & x\notin Q \end{cases}$ را بررسی کنید.

۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^{۲}+x+۱} & x>۰ \\ a\sqrt{x^{۲}+bx}+c & x<۰ \end{cases}$ فرد باشد، $a+b+c$ چقدر است.

۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{۳x}{x^{۲}+۵x-۱} & x>۰ \\ \frac{ax}{x^{۲}+bx+c} & x<۰ \end{cases}$ فرد باشد، آنگاه $a+b+c$ چقدر است.

۸- مقادیر a و b را طوری به دست آورید تا تابع

$$f(x)=x+(a-۱)x^{۲}+(b+۲)\cos x+\sin x$$

تابعی فرد باشد.

۹- اگر f تابعی فرد و g تابعی زوج باشد زوج یا فرد بودن هر یک از توابع $g+f$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، fog ، gof ، fof و gog را بررسی کنید.

۱۰- نمودار تابعی با دامنه‌ی $\Re-[-۲,۲]$ رسم کنید که:

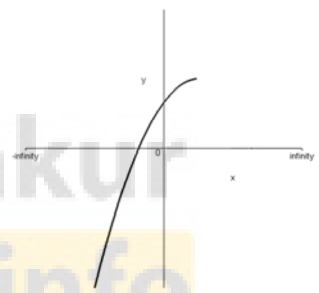
الف) زوج باشد ب) فرد باشد ج) هم زوج باشد هم فرد د) نه زوج باشد نه فرد

توابع صعودی و توابع نزولی

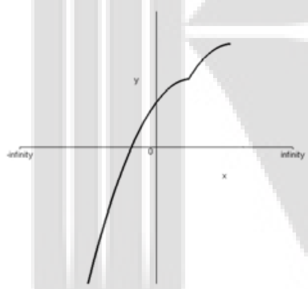
- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) \le f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را صعودی گوییم.
- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) < f(x_2)$ و بالعکس، آنگاه تابع f را صعودی اکید گوییم.
- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) \ge f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را نزولی گوییم.
- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را نزولی اکید گوییم.

مثال: صعودی یا نزولی بودن هر یک از توابع زیر را روی دامنه تعریفشان بررسی کنید.

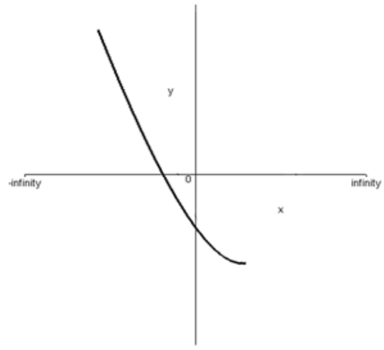
الف)



ب)

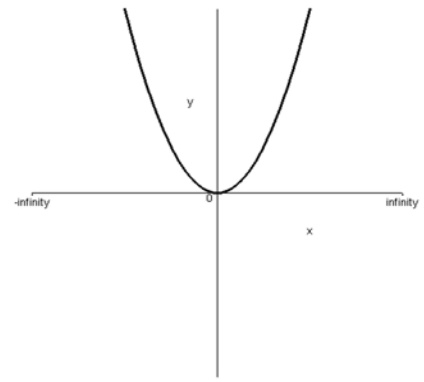


ج)

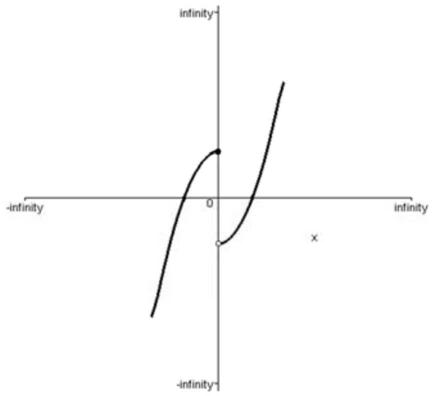


د)

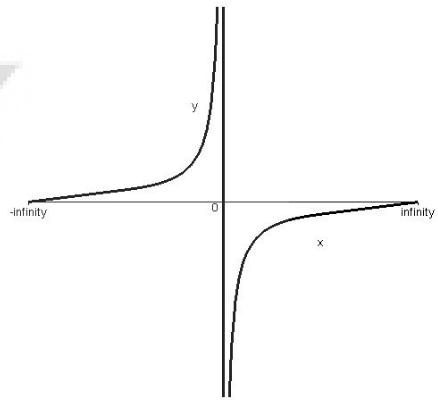
هـ)



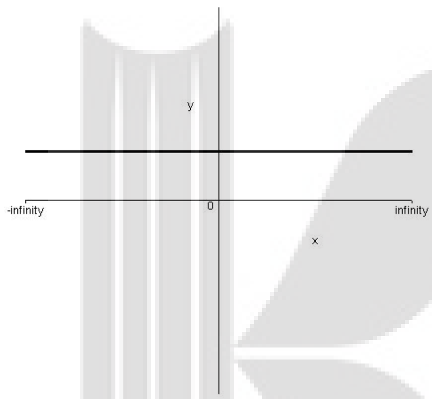
و)



ز)



ح)



حل:

الف) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y نیز زیاد می‌شود. پس تابع صعودی اکید است.

ب) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) \le f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند. پس تابع صعودی است.

ج) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) > f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y کم می‌شود. پس تابع نزولی اکید است.

د) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) \ge f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند. پس تابع نزولی است.

ه) اگر $x_2 \le 0$ و x_1 و $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. این نشان می‌دهد تابع f صعودی نیست از طرف دیگر، اگر $x_2 \ge 0$ و x_1 و $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. این نشان می‌دهد تابع f نزولی نیست، بنابراین تابع f نه صعودی است و نه نزولی.

و) تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $(0, +\infty]$ صعودی اکید است، ولی مقادیر تابع در مجاورت چپ صفر از مقادیر تابع در مجاورت راست صفر بیشتر است. بنابراین تابع روی دامنه‌ی تعریف خود یعنی بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ نه صعودی است و نه نزولی.

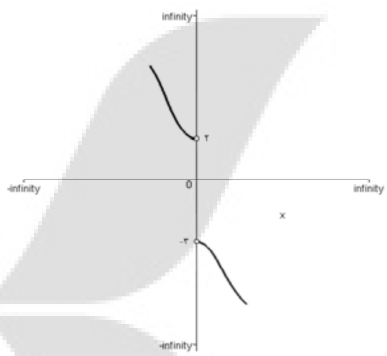
ز) تابع در بازه‌ی $(-\infty , \cdot)$ و $(\cdot , +\infty)$ صعودی اکید است ولی مقادیر تابع در مجاورت چپ صفر از مقادیر تابع در مجاورت راست صفر بیشتر است. پس تابع در دامنه‌ی تعریف خودیعنی بازه‌ی $(-\infty , \cdot)\cup(\cdot , +\infty)$ نه صعودی است و نه نزولی.

ح) با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y کم نمی‌شود. پس تابع صعودی است و همچنین با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y زیاد نمی‌شود. پس تابع نزولی است ولی صعودی اکید یا نزولی اکید نیست.

مثال: حدود k را طوری به دست آورید تا تابع $f = \{(۲ , ۷) , (-۱ , ۲) , (\cdot , k) , (-۲ , ۱)\}$ صعودی اکید شود.

حل: چون تابع صعودی اکید است باید با زیاد شدن مؤلفه‌های اول، مؤلفه‌های دوم نیز زیاد شوند. بنابر این لازم است $k \in (۲ , ۷)$ باشد.

مثال: در تابع f که نمودار آن به صورت زیر رسم شده، مقادیر $f(\cdot)$ در چه بازه‌ای می‌تواند تغییر کند تا تابع f نزولی اکید باشد.



حل: با توجه به اینکه با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y باید کم شود. لذا لازم است $f(\cdot)$ عددی در فاصله‌ی $[-۳ , ۲]$ باشد.

مثال: صعودی یا نزولی بودن هر یک از توابع زیر را روی دامنه‌ی تعریفشان بررسی کنید.

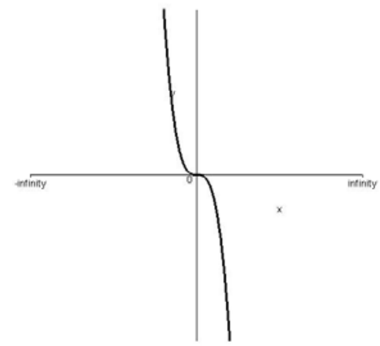
الف) $f(x) = -x^۳$ ب) $f(x) = ۲x^۳ + ۴x - ۱$

ج) $f(x) = \log_a^x$ د) $f(x) = \sqrt{۳ - ۲x}$

هـ) $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x < \cdot \\ ۲ - x & x \geq \cdot \end{cases}$ و) $f(x) = |x - ۱| + ۳$

حل:

الف) روش اول: نمودار تابع f به صورت زیر است.



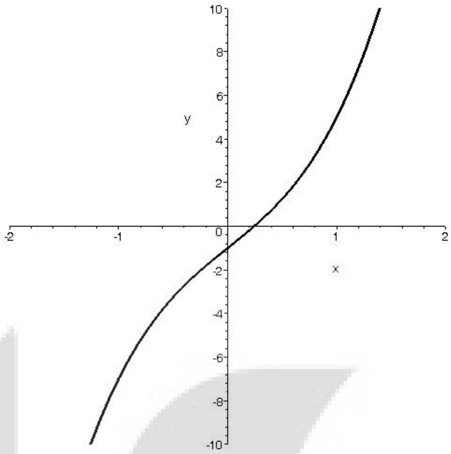
با توجه به نمودار واضح است که تابع نزولی اکید می‌باشد.

روش دوم: $x_1,x_2 \in D_f = \Re$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$ پس داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

بنابراین تابع f نزولی اکید است.

ب) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است.



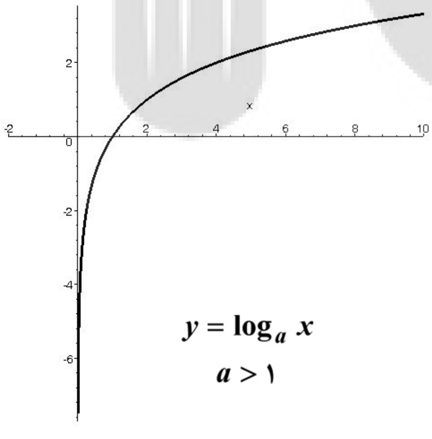
همان‌گونه که از روی نمودار مشخص است، تابع صعودی اکید می‌باشد.

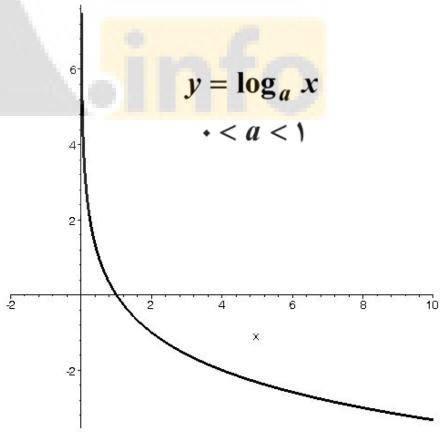
روش دوم: $x_1,x_2 \in D_f = \Re$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$ پس داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^3 < 2x_2^3 \\ 4x_1 < 4x_2 \end{cases} \Rightarrow 2x_1^3 + 4x_1 < 2x_2^3 + 4x_2 \Rightarrow 2x_1^3 + 4x_1 - 1 < 2x_2^3 + 4x_2 - 1$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

بنابراین تابع f، صعودی اکید است.

ج) روش اول: نمودار تابع شبیه یکی از دو نمودار زیر است.





بنابراین اگر $a > 1$ باشد تابع صعودی اکید است و اگر $0 < a < 1$، تابع نزولی اکید می‌باشد.

روش دوم: رابطه‌های

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log x_1 < \log x_2 \quad \text{و} \quad \log_a^x = \frac{\log x}{\log a}$$

را در نظر گرفته، دو عضو $x_1, x_2 \in D_f = (0, +\infty)$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$. سپس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول ($a > ۱$):

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow \log x_۱ < \log x_۲ \overset{\log a > ۰}{\Rightarrow} \frac{\log x_۱}{\log a} < \frac{\log x_۲}{\log a} \Rightarrow \log_a^{x_۱} < \log_a^{x_۲}$$
$$\Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

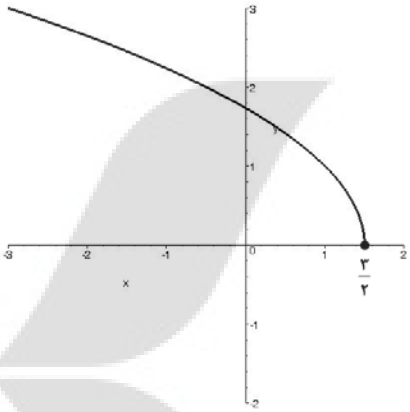
در نتیجه f صعودی اکید است.

حالت دوم ($۰ < a < ۱$):

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow \log x_۱ < \log x_۲ \overset{\log a < ۰}{\Rightarrow} \frac{\log x_۱}{\log a} > \frac{\log x_۲}{\log a} \Rightarrow \log_a^{x_۱} > \log_a^{x_۲}$$
$$\Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

در نتیجه f نزولی اکید است.

د) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است.



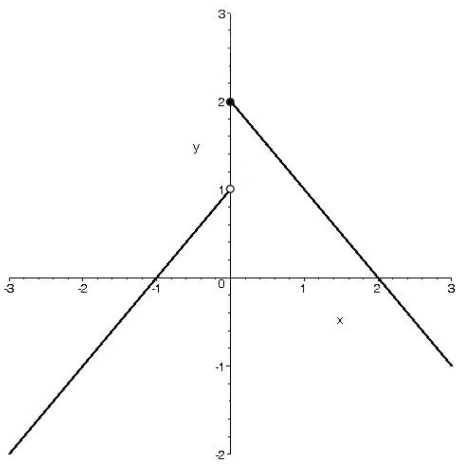
با توجه به نمودار واضح است که تابع نزولی اکید می‌باشد

روش دوم: $x_۱, x_۲ \in D_f = (-\infty , \frac{۳}{۲}]$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_۱ < x_۲$. لذا داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow ۳ - ۲x_۱ > ۳ - ۲x_۲ \Rightarrow \sqrt{۳ - ۲x_۱} > \sqrt{۳ - ۲x_۲} \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

در نتیجه f نزولی اکید است.

هـ) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشخص است تابع f در دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است نه نزولی.

توجه: تابع روی $(-\infty , ۰)$ صعودی اکید و روی $[۰ , +\infty)$ نزولی اکید است.

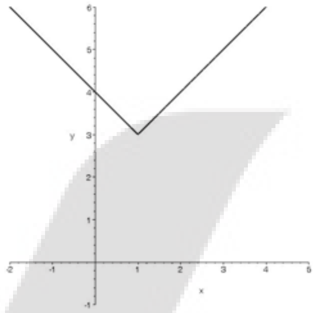
روش دوم: x_1 و x_2 را به دلخواه به صورت‌های زیر انتخاب می‌کنیم. ضابطه قسمت اول تابع صعودی اکید است.

$$\begin{cases} x_1, x_2 < 0 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 > 0 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow -x_1 < -x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

ضابطه قسمت دوم، تابع نزولی اکید است. بنابراین تابع روی دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است و نه نزولی.

و) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است و با توجه به نمودار واضح است که تابع f روی دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است نه نزولی.



روش دوم : دو عضو دلخواه از $D_f = \Re$ را به صورت‌های زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1, x_2 \le 1 \\ x_1 < x2 \end{cases} \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow |x_1 - 1| > |x_2 - 1| \Rightarrow |x_1 - 1| + 3 > |x_2 - 1| + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

پس تابع f در فاصله‌ی $(-\infty, 1]$ نزولی اکید است.

$$\begin{cases} x_1, x_2 \ge 1 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow |x_1 - 1| < |x_2 - 1| \Rightarrow |x_1 - 1| + 3 < |x_2 - 1| + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

پس تابع f در فاصله‌ی $[1, +\infty)$ صعودی اکید است. اما تابع روی دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است و نه نزولی.

مثال: اگر f تابعی صعودی با دامنه‌ی $\Re$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع

$$g(x) = \sqrt{f(|x-2|) - f(|2x-1|)}$$

را به دست آورید.

حل: داریم:

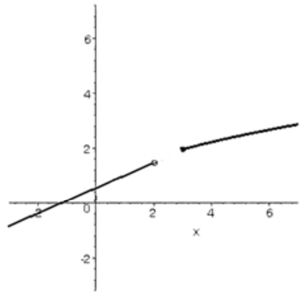
$$f(|x-2|) - f(|2x-1|) \ge 0 \Rightarrow f(|x-2|) \ge f(|fx-1|)$$

چون f تابعی صعودی است داریم:

$$|x-2| \ge |2x-1| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \ge 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 3 \le 0 \Rightarrow -1 \le x \le 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \ge 3 \\ \frac{1}{2}x + a & x < 2 \end{cases}$ صعودی اکید باشد، بیشترین مقدار a را به دست آورید.

حل: نمودار تابع به صورت زیر است.



چون تابع f صعودی است پس لازم است $1+a \le 2$ یعنی $a \le 1$ بنابراین بیشترین مقدار a می‌تواند یک باشد.

تمرین :

۱- یکنوایی هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+1} \quad x \ge 0$

ج) $f(x)=2-\dfrac{4}{\sqrt{x+3}} \quad x \ge 0$

د) $f(x)=\dfrac{1}{x-2} \quad x > 2$

هـ) $f(x)=x+|x| \quad 0 \le x \le \pi$

و) $f(x)=2-5x^2 \quad x \le 0$

ز) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & x<2 \\ x^3-5 & x \ge 2 \end{cases}$

ح) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 2-x^2 & x \ge 0 \end{cases}$

ط) $f(x)=\sin x \quad \pi \le x \le 2\pi$

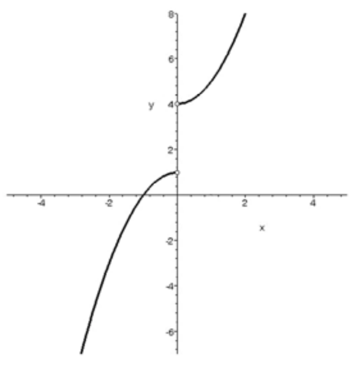
ی) $f(x)=\log_2(x-2)$

ک) $f(x)=\cos x \quad 0 \le x \le \pi$

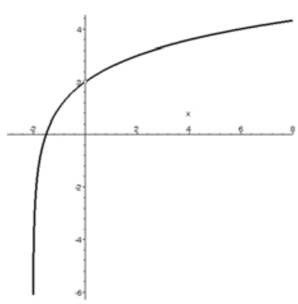
۲- هرگاه تابع $f=\{(2,-3),(-1,5),(0,k),(1,2)\}$ نزولی باشد، حدود k را به دست آورید.

۳- در توابع زیر $f(0)$ چه مقداری باشد، تا تابع f روی $\Re$ صعودی اکید باشد.

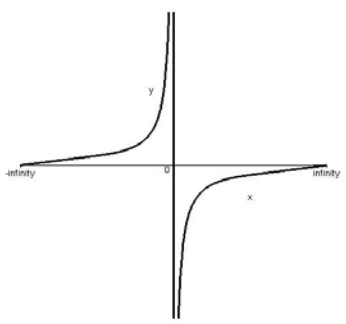
الف)



ب)



ج)



❖ **توابعی که یا صعودی باشند یا نزولی، توابع یکنوا نامیده می‌شوند.**

❖ **توابعی که اکیداً صعودی باشند یا اکیداً نزولی، توابع اکیداً یکنوا نامیده می‌شوند.**

مثال: تابع $y = x^۲$ روی دامنه تعریف خود نه صعودی است نه نزولی. پس تابعی غیر یکنوا است.

مثال: اگر تابع f نزولی اکید و تابع g بر R_f نزولی اکید باشد، یکنوایی تابع gof را بررسی کنید.

حل: دو عضو دلخواه $x_۱, x_۲ \in D_f$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $x_۱ < x_۲$. پس داریم:

$$x_۱ < x_۲ \;\Rightarrow\; f(x_۱) > f(x_۲) \;\Rightarrow\; g(f(x_۱)) < g(f(x_۲))$$

یعنی در واقع داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow (gof)(x_۱) < (gof)(x_۲)$$

پس تابع gof صعودی اکید می‌باشد، بنابراین یکنوای اکید می‌باشد.

مثال: اگر دو تابع f و g در بازه‌ی I، صعودی اکید باشند یکنوایی تابع $f+g$ را روی I بررسی کنید.

حل: $x_۱, x_۲ \in I$ را به طور دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_۱ < x_۲$. پس داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow \begin{cases} f(x_۱) < f(x_۲) \\ g(x_۱) < g(x_۲) \end{cases} \Rightarrow f(x_۱) + g(x_۱) < f(x_۲) + g(x_۲)$$
$$\Rightarrow (f+g)(x_۱) < (f+g)(x_۲)$$

تابع $f+g$ صعودی اکید است. بنابراین تابع $f+g$ یکنوای اکید می‌باشد.

مثال: تابع $y = -x^۳$ تابع نزولی اکید است. پس تابع یکنوای اکید می‌باشد.

توجه: بعد از فراگیری مبحث مشتق، می‌توانیم در توابع مشتق پذیر، یکنوایی را با روش‌های ساده‌تری بررسی کنیم.

تمرین:

۱- یکنوایی هر یک از توابع زیر را روی دامنه تعریف بررسی کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-۲}$ ب) $f(x) = \dfrac{۱}{\sqrt{x-۲}}$ ج) $f(x) = \begin{cases} -x^۳ & x < ۰ \\ x^۳ & x \geq ۰ \end{cases}$

۲- اگر دو تابع f و g در بازه‌ی I صعودی اکید و با مقادیر مثبت باشند، یکنوایی تابع $f \times g$ را روی بازه I بررسی کنید.

۳- اگر f نزولی اکید و g بر R_f نزولی اکید باشد، یکنوایی تابع gof را بررسی کنید.

تابع یک به یک

❖ **تابع f یک به یک است، اگر برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داشته باشیم:**

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

و یا به بیان دیگر:

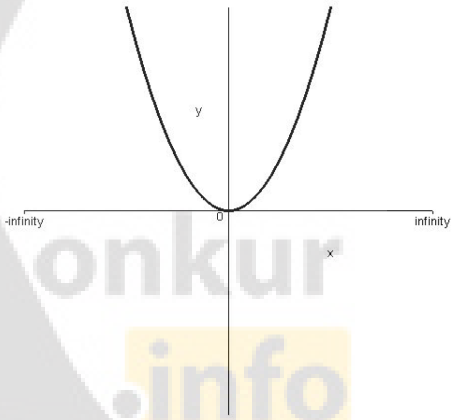
❖ **تابع f یک به یک است اگر برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داشته باشیم:**

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

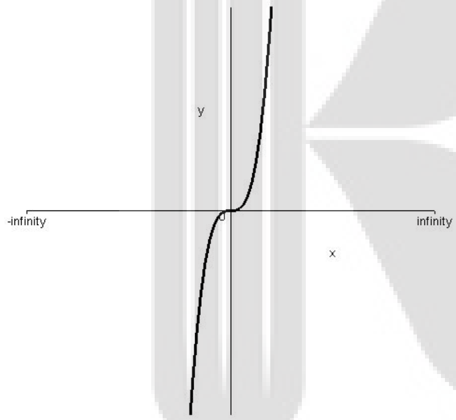
❖ **نمودار یک تابع در صورتی نمودار تابع یک به یک است که هر خط موازی محور x ها حداکثر در یک نقطه آن را قطع کند.**

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.

الف)



ب)



ج) $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 2)\}$

حل:

الف) یک به یک نیست زیرا مثلاً خط $y = 1$ نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

ب) هر خط موازی محو xها رسم کنیم. نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند. پس تابع یک به یک است.

ج) یک به یک نیست زیرا $f(1) = f(4)$ ولی $1 \neq 4$.

مثال: یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^3 + 4}$ ب) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

ج) $f(x) = x + |x - 2|$ د) $f(x) = \log x$

هـ) $f(x) = \sin x - \cos x$ و) $f(x) = \dfrac{3^x}{3^x + 1}$

حل:

الف) روش اول:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow \sqrt{x_۱^۳+۴}=\sqrt{x_۲^۳+۴}\Rightarrow x_۱^۳+۴=x_۲^۳+۴\Rightarrow x_۱^۳=x_۲^۳\Rightarrow x_۱=x_۲$$

بنابراین تابع f یک به یک است.

روش دوم:

$$x_۱\neq x_۲\Rightarrow x_۱^۳\neq x_۲^۳\Rightarrow x_۱^۳+۴\neq x_۲^۳+۴\Rightarrow \sqrt{x_۱^۳+۴}\neq\sqrt{x_۲^۳+۴}\Rightarrow f(x_۱)\neq f(x_۲)$$

بنابراین تابع f یک به یک است.

ب)

$$f(x)=x^۲+۲x+۳=(x+۱)^۲+۲$$

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow (x_۱+۱)^۲+۲=(x_۲+۱)^۲+۲\Rightarrow (x_۱+۱)^۲=(x_۲+۱)^۲$$

$$\Rightarrow x_۱+۱=\pm(x_۲+۱)\Rightarrow\begin{cases}x_۱=x_۲\\x_۱=-x_۲-۲\end{cases}$$

پس تابع f یک به یک نیست.

ج)

$$f(۰)=f(۱)=۲\Rightarrow ۰\neq ۱$$

پس تابع f یک به یک نیست.

د)

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow \log x_۱=\log x_۲\Rightarrow \log x_۱-\log x_۲=۰$$

$$\Rightarrow \log\frac{x_۱}{x_۲}=۰\Rightarrow \frac{x_۱}{x_۲}=۱\Rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع f یک به یک است.

ه)

$$f(۰)=f(۲\pi)=-۱\Rightarrow ۰\neq ۲\pi$$

بنابراین تابع f یک به یک نیست.

توجه: توابع متناوب یک به یک نیستند.

و)

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow \frac{۳^{x_۱}}{۳^{x_۱}+۱}=\frac{۳^{x_۲}}{۳^{x_۲}+۱}\Rightarrow ۳^{x_۱}\times ۳^{x_۲}+۳^{x_۱}=۳^{x_۲}\times ۳^{x_۱}+۳^{x_۲}$$

$$\Rightarrow ۳^{x_۱}=۳^{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع f یک به یک است

مثال: ثابت کنید اگر تابع f یکنوای اکید باشد آنگاه تابع f یک به یک است.

حل: مثلاً فرض کنیم تابع f صعودی اکید باشد آنگاه اگر $x_۱\neq x_۲$ دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: اگر $x_۱<x_۲$ باشد، داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

لذا f یک به یک است.

حالت دوم اگر $x_1 > x_2$ باشد، داریم:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

لذا f یک به یک است.

مثال: اگر توابع f و g یک به یک باشند، یک به یک بودن هر یک از توابع $f+g$ و fog را بررسی کنید.

حل: تابع $f+g$ همواره نمی‌تواند یک به یک باشد زیرا مثلاً اگر $f=\{(0,0),(1,1)\}$ و $g=\{(0,0),(1,-1)\}$ را در نظر بگیریم، داریم $f+g=\{(0,0),(1,0)\}$ که یک به یک نیست.

اما تابع fog یک به یک است زیرا:

$$(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \Rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2))$$

$$\underset{1-1}{\overset{f}{\Rightarrow}} g(x_1)=g(x_2)$$

$$\underset{1-1}{\overset{g}{\Rightarrow}} x_1=x_2$$

مثال: آیا یک تابع می‌تواند هم فرد و هم یک به یک باشد.

حل: بلی. مثلاً توابع $y=x^3$ و $y=x$ هم فرد است و هم یک به یک. ولی تابع $y=\sin x$ فرد است، اما یک به یک نیست.

مثال: آیا یک تابع می‌تواند هم زوج و هم یک به یک باشد.

حل: فرض کنیم f تابعی زوج و یک به یک باشد. داریم:

$$\text{تابعی زوج است } f \Rightarrow f(x)=f(-x) \overset{\text{یک به یک است } f}{\Rightarrow} x=-x \Rightarrow x=0$$

پس تنها تابعی که هم زوج و هم یک به یک است، تابعی دلخواه با دامنه‌ی یک عضوی صفر می‌باشد.

تمرین:

۱- یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $y = x^{۳} + ۵$ ب) $y = ۵ - x^{۲}$

ج) $y = x^{۲} - ۶x + ۲$ د) $y = x + \sqrt[۳]{x}$

هـ) $y = \sqrt[۳]{x + ۵}$ و) $y = \sin x \ , \ x \in \left[-\frac{\pi}{۲} \ , \ \frac{\pi}{۲}\right]$

ز) $y = \cos x \ , \ x \in [۰ \ , \ \pi]$ ح) $y = ۲^{x+۱}$

ط) $y = \frac{x^{۲} - ۱}{x^{۲} + ۴}$ ی) $y = \frac{۲x + ۳}{۵ - ۳x}$

ک) $y = |x - ۲| - ۵$

۲- اگر f و g تابعی یک به یک باشند یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را در حالت کلی بررسی کنید.

الف) $f - g$ ب) $f \times g$ ج) $\frac{f}{g}$

❖ **یک تابع چند ضابطه‌ای در صورتی یک به یک است که هر یک از ضابطه‌ها یک به یک بوده و اشتراک برد دوبه‌دوی ضابطه‌ها مجموعه تهی باشد.**

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x < ۱ \\ ۲x + ۳ & x \geq ۱ \end{cases}$ را بررسی کنید.

حل:

$$f_{۱}(x_{۱}) = f_{۱}(x_{۲}) \Rightarrow x_{۱} + ۱ = x_{۲} + ۱ \Rightarrow x_{۱} = x_{۲}$$

ضابطه اول یک به یک است.

$$f_{۲}(x_{۱}) = f_{۲}(x_{۲}) \Rightarrow ۲x_{۱} + ۳ = ۲x_{۲} + ۳ \Rightarrow ۲x_{۱} = ۲x_{۲} \Rightarrow x_{۱} = x_{۲}$$

ضابطه دوم یک به یک است.

$$\left.\begin{array}{l} x < ۱ \Rightarrow x + ۱ < ۲ \Rightarrow R_{۱} = (-\infty \ , \ ۲) \\ x \geq ۱ \Rightarrow ۲x \geq ۲ \Rightarrow ۲x + ۳ \geq ۵ \Rightarrow R_{۲} = (۵ \ , \ +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow R_{۱} \cap R_{۲} = \phi$$

پس اشتراک برد ضابطه‌ها نیز تهی است. بنابراین f تابعی یک به یک است.

مثال: حدود k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۲ & x > ۱ \\ ۲x + k & x \leq ۱ \end{cases}$ یک به یک باشد.

حل: واضح است که هر یک از ضابطه‌ها تابعی یک به یک هستند، کافی است اشتراک برد آن‌ها نیز تهی باشد.

$$\left.\begin{array}{l} x > ۱ \Rightarrow ۳x > ۳ \Rightarrow ۳x - ۲ > ۱ \Rightarrow R_{۱} = (۱ \ , +\infty) \\ x \leq ۱ \Rightarrow ۲x \leq ۲ \Rightarrow ۲x + k \leq ۲ + k \Rightarrow R_{۲} = (-\infty \ , \ ۲ + k) \end{array}\right\} \Rightarrow ۲ + k \leq ۱ \Rightarrow k \leq -۱$$

تمرین:

۱- یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x+۳ & x<۰ \\ ۲-x & x\geq ۰ \end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x<۱ \\ ۲x+۳ & x\geq ۱ \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x>۰ \\ ۱-x^{۲} & x\leq ۰ \end{cases}$ د) $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x<۰ \\ x+۲ & ۰\leq x<۲ \\ x+۴ & x\geq ۲ \end{cases}$

هـ) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲x & x<۲ \\ x+۱ & ۲\leq x<۳ \\ ۴-x & x\geq ۳ \end{cases}$ و) $y=\dfrac{x}{۳+|x|}$

ز) $y=x^{۲}|x|$ ح) $y=x|x|$

۲- مقدار a را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} x+a & x<۳ \\ ۲x+۵ & x\geq ۳ \end{cases}$ یک به یک باشد.

۳- مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۲k & k>۱ \\ ۲x-k & x\leq ۱ \end{cases}$ یک به یک باشد.

۴- مقدار a و b را طوری بیابید تا تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۱ & x<-۱ \\ x+۲ & -۱\leq x<۲ \\ ۲x+b & x\geq ۲ \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد.

۵- حدود m را طوری تعیین کنید تا تابع $g(x)=\begin{cases} ۳x+۵ & x\leq m \\ ۲x-۷ & x>m \end{cases}$، یک به یک باشد.

وارون تابع

❖ **اگر وارون $f=\{(x\,,\,y)|x\in A\,,\,y\in B\}$ یک تابع باشد، وارون تابع f به صورت $\{(y\,,\,x)|(x\,,\,y)\in f\}$ تعریف می‌شود. اگر تابع f به صورت نمودار نمایش داده شده باشد، برای پیدا کردن وارون آن کافی است قرینه‌ی نقاط نمودار را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.**

مثال: وارون هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f=\{(۱\,,\,۲)\,,\,(۳\,,\,۴)\,,\,(۵\,,\,۶)\}$ ب) $g=\{(۱\,,\,۳)\,,\,(۲\,,\,۴)\,,\,(۵\,,\,۳)\}$

حل:

الف) $f=\{(۲\,,۱)\,,\,(۴\,,۳)\,,\,(۶\,,\,۵)\}$ همان‌گونه که مشاهده می‌شود وارون تابع f یک تابع را مشخص می‌کند.

ب) $g=\{(۳\,,۱)\,,\,(۴\,,\,۲)\,,\,(۳\,,\,۵)\}$ همان‌گونه که مشاهده می‌شود وارون تابع g یک تابع نیست.

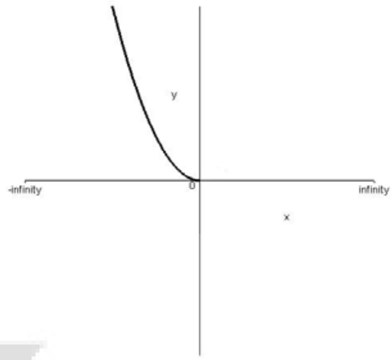
تمرین:

۱- وارون هر یک از توابع زیر را مشخص کنید و معین نمایید وارون کدام یک، تابع را مشخص می‌کند.

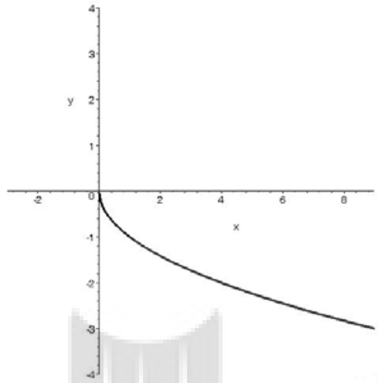
الف) $g=\{(1\,,\,2)\,,\,(7\,,\,2)\,,\,(3\,,\,4)\}$

ب) $g=\{(1\,,\,2)\,,\,(7\,,\,2)\,,\,(3\,,\,4)\}$

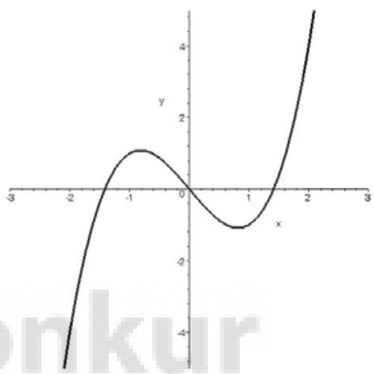
ج)



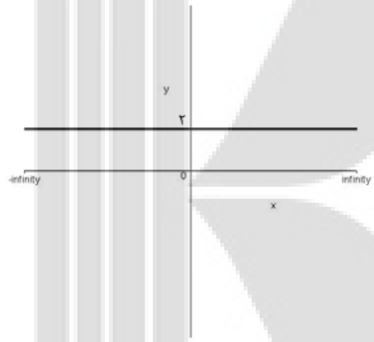
د)



هـ)



و)



۲- تحقیق کنید چه شرط یا شرایطی باید موجود باشد تا وارون تابع f، خود نیز یک تابع باشد.

❖ **اگر وارون تابع f خود یک تابع باشد، آن را تابع وارون f می‌گویند و f را وارون‌پذیر می‌نامند. بدیهی است f وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر f یک به یک باشد و وارون تابع f را با f^{-1} نمایش می‌دهیم.**

مثال: تابع وارون تابع $f(x)=3x+5$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: ابتدا یک به یک بودن تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3x_1+5=3x_2+5\Rightarrow 3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

تابع f یک به یک است، پس وارون پذیر می‌باشد. برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون کافی است y را به جای $f(x)$ قرار دهیم و x را برحسب y به دست آورده، سپس جای x و y را با هم عوض کنیم.

$$y=3x+5\Rightarrow 3x=y-5\Rightarrow x=\frac{y-5}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-5}{3}$$

مثال: اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$ ، توابع $f^{-۱}$ و $\frac{۱}{f}$ را محاسبه کنید.

حل: f یک به یک است پس $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۴,۳)\}$ و $\frac{۱}{f}=\left\{\left(۱,\frac{۱}{۲}\right),\left(۳,\frac{۱}{۴}\right)\right\}$. واضح است که $f^{-۱}$ و $\frac{۱}{f}$ با هم مساوی نیستند.

مثال: تابع وارون هر یک از توابع وارون‌پذیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{۳}+۴$

ب) $f(x)=x^{۲}-۴\ ,\ x<۰$

ج) $f(x)=۲x^{۳}+۶x^{۲}+۶x$

د) $f(x)=\log_{۵}^{x}$

هـ) $f(x)=\sqrt{۲-۳x}$

و) $f(x)=x+\frac{۱}{x}\ ,\ x\geq ۱$

ز) $f(x)=\frac{۲x+۱}{۳x-۲}$

حل: با توجه به اینکه روی وارون‌پذیری توابع داده شده تصریح شده است، بررسی وارون‌پذیری لازم نیست.

الف)

$$y=x^{۳}+۴\Rightarrow x^{۳}=y-۴\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۴}$$

ب)

$$y=x^{۲}-۴\Rightarrow x^{۲}=y+۴\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+۴}\overset{x<۰}{\Rightarrow} x=-\sqrt{y+۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۴}$$

ج)

$$y=۲\left(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x\right)\Rightarrow y=۲\left(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱-۱\right)\Rightarrow y=۲(x+۱)^{۳}-۲$$

$$\Rightarrow (x+۱)^{۳}=\frac{y+۲}{۲}\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{\frac{y+۲}{۲}}\Rightarrow x=-۱+\sqrt[۳]{\frac{y+۲}{۲}}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{x+۲}{۲}}-۱$$

د)

$$y=\log_{۵}^{x}\Rightarrow x=۵^{y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۵^{x}$$

هـ)

$$y=\sqrt{۲-۳x}\Rightarrow y^{۲}=۲-۳x\Rightarrow ۳x-۲-y^{۲}\Rightarrow x=\frac{۲-y^{۲}}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲-x^{۲}}{۳}$$

و)

$$y=x+\frac{۱}{x}\Rightarrow y=\frac{x^{۲}+۱}{x}\Rightarrow x^{۲}-yx+۱=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{y\pm\sqrt{y^{۲}-۴}}{۲}\overset{(۲,\frac{۵}{۲})\in f}{\Rightarrow} x=\frac{y+\sqrt{y^{۲}-۴}}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۴}}{۲}$$

ز)

$$y=\frac{۲x+۱}{۳x-۲}\Rightarrow ۳xy-۲y=۲x+۱\Rightarrow ۳xy-۲x=۲y+۱\Rightarrow x(۳y-۲)=۲y+۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲y+۱}{۳y-۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۱}{۳x-۲}$$

توجه: در بعضی توابع امکان دارد تابع وارون f و تابع f با هم مساوی شوند.

تمرین:

۱- تابع وارون هر یک از توابع زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱-۳x}{۵}$ ب) $f(x)=\sqrt{۳}-۲\pi$

ج) $f(x)=۲^x+۳$ د) $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x}\ ,\ x<-۳$

هـ) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$ و) $f(x)=x^۳-۳x$

ز) $f(x)=\log_۳(x-۲)$ ح) $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)$

۲- فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محور yها و نقطه‌ی برخورد وارون این تابع نمایی با محور xها چقدر است؟

۳- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^۲+۱}$ ، ضابطه‌ی $f^{-۱}(x)$ را به دست آورید.

۴- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰\ \ ۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$، تابع $gof^{-۱}$ را به دست آورید.

۵- اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲$ و $x>۰$ آنگاه ضابطه‌ی تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ را به دست آورید.

۶- با توجه به ماشین $x\rightarrow\boxed{f}\rightarrow\boxed{g}\rightarrow x$، اگر $f(x)=۲x-۱$، آنگاه $g(۰)$ را به دست آورید.

❖ اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم:

$$D_g=R_f\quad,\quad R_g=D_f$$

و برای هر $x\in D_f$ داریم:

$$g(f(x))=x$$

و برای هر $x\in D_g$ داریم:

$$f(g(x))=x$$

مثال: نشان دهید توابع $f(x)=۲x+۵$ و $g(x)=\frac{x-۵}{۲}$ وارون یکدیگرند.

حل:

$$x \in D_g \text{ دلخواه} : f(g(x)) = f\left(\frac{x-۵}{۲}\right) = ۲\times\frac{x-۵}{۲}+۵ = x$$

$$x \in D_f \text{ دلخواه} : g(f(x)) = g(۲x+۵) = \frac{۲x+۵-۵}{۲} = x$$

مثال: آیا دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{۲}$ و $g(x)=۲x+۱$ وارون یکدیگر هستند؟

حل:

روش اول:

$$x \in D_g \text{ دلخواه} : f(g(x)) = f(۲x+۱) = \frac{۲x+۱+۱}{۲} = x+۱ \neq x$$

روش دوم:

$(۰\,,\frac{۱}{۲}) \in f$ ولی $(\frac{۱}{۲}\,,۰) \notin g$.

روش سوم:

$$f(x)=\frac{x+۱}{۲} \Rightarrow y=\frac{x+۱}{۲} \Rightarrow ۲y=x+۱ \Rightarrow x=۲y-۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۲x-۱ \neq g(x)$$

بنابراین f و g وارون یکدیگر نیستند.

مثال: برد تابع وارون تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۴}-۲}$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم $R_{f^{-۱}}=D_f$. پس کافی است دامنه‌ی تعریف تابع f را به دست آوریم.

$$\begin{cases} x+۴ \geq ۰ \\ \sqrt{x+۴}-۲ \Rightarrow \sqrt{x+۴} \neq ۲ \Rightarrow x \neq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -۴ \\ x \neq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = (-۴\,,۰)\cup(۰\,,\infty) \Rightarrow R_{f^{-۱}} = (-۴\,,۰)\cup(۰\,,+\infty)$$

مثال: $f(x)=\frac{۱-۳x}{۴}\ ,\ ۲\leq x<۴$ داده شده است. دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم $R_{f^{-۱}}=R_f$. پس کافی است برد تابع f را به دست آوریم.

$$۲\leq x<۴ \Rightarrow -۱۲<-۳x\leq -۶ \Rightarrow -۱۱<۱-۳x\leq -۵ \Rightarrow \frac{-۱۱}{۴}<\frac{۱-۳x}{۴}\leq -\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{-۱۱}{۴}<y\leq -\frac{۵}{۴} \Rightarrow R_f=(\frac{-۱۱}{۴}\,,\frac{-۵}{۴}] \Rightarrow D_{f^{-۱}}=(\frac{-۱۱}{۴}\,,\frac{-۵}{۴}]$$

تمرین:

۱- دامنه‌ی تابع وارون تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۲\ ,\ x\geq ۳$ را به دست آورید.

۲- دامنه‌ی تابع وارون تابع $f(x)=x^{۲}-۲x+۳\ ,\ x<۰$ را به دست آورید.

۳- دامنه‌ی تابع وارون تابع $f(x)=-x^{۲}+۴x+۱\ ,\ x>۳$ را به دست آورید.

۴- اگر برد تابع یک به یک f برابر $[-۲\ ,\ ۵)$ باشد، دامنه‌ی تابع وارون هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $g(x)=f(x+۲)$ ب) $g(x)=f(x-۳)$

ج) $g(x)=۲f(x)-۳$ د) $g(x)=۱-۳f(x-۲)$

۵- کدام دسته از توابع زیر وارون یکدیگر هستند.

۱) $f(x)=-\sqrt{x-۳}\quad ,\quad g(x)=x^{۲}+۳$

۲) $f(x)=x\sqrt{x}+۱\quad ,\quad g(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}$

۳) $f(x)=۵+\sqrt{۱+x^{۳}}\quad ,\quad g(x)=\sqrt[۳]{(x-۵)^{۲}-۱}$

۴) $f(x)=(۲-۳x)^{۵}\quad ,\quad g(x)=\frac{۱}{۳}\left(۲+\sqrt[۵]{x}\right)$

۵) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<۰ \\ x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۱ \\ \sqrt{x-۱} & x\geq ۱ \end{cases}$

۶- دامنه تابع وارون تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}$ را به دست آورید.

❖ **برای به دست آوردن تابع وارون یک تابع چند ضابطه‌ای در صورت وجود وارون هر یک از ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم. بدیهی است دامنه‌ی هر ضابطه، برد ضابطه‌ی نظیر در تابع اصلی است.**

مثال: تابع وارون تابع وارون‌پذیر $f(x)=\begin{cases} x-۲ & x<۱ \\ ۲x+۴ & x\geq ۱ \end{cases}$ را به دست آورید.

حل: برای ضابطه‌ی اول داریم:

$$x<۱\Rightarrow x-۲<-۱\Rightarrow R_{۱}=(-\infty\ ,\ -۱)$$

در نتیجه:

$$y=x-۲\Rightarrow x=y+۲\Rightarrow f_{۱}^{-۱}(x)=x+۲$$

برای ضابطه‌ی دوم داریم:

$$x\geq ۱\Rightarrow ۲x\geq ۲\Rightarrow ۲x+۴\geq ۶\Rightarrow R_{۲}=[۶\ ,\ +\infty)$$

در نتیجه:

$$y=۲x+۴\Rightarrow ۲x=y-۴\Rightarrow x=\frac{y-۴}{۲}\Rightarrow f_{۲}^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون f به صورت زیر خواهد بود.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x+۲ & x<-۱\\ \dfrac{x-۴}{۲} & x\geq ۶\end{cases}$$

تمرین:

۱- ضابطه‌ی تابع وارون هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۰\\ x^۲+۱ & x\geq ۰\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}x & ۰\leq x<۱\\ x+۱ & ۱\leq x<۲\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}۲^x & x>۱\\ ۳^x & x\leq ۱\end{cases}$

د) $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x & x>۰\\ x+۱ & x\leq ۰\end{cases}$

هـ) $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۰\\ ۲x+۳ & ۰\leq x<۲\\ x+۹ & x\geq ۲\end{cases}$

و) $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۱ & x<۰\\ x-۱ & ۰\leq x<۱\\ \log x & x\geq ۱\end{cases}$

۲- اگر $f(x)=\begin{cases}-۴x+۱ & x<۲\\ -x^۲+۴x-۱۱ & x\geq ۲\end{cases}$ ، مقدار $f^{-۱}(-۱۱)$ را به دست آورید.

❖ **اگر f تابع صعودی اکید باشد، محل برخورد f و $f^{-۱}$ در صورت وجود روی خط $y=x$ قرار دارد.**

مثال: اگر $f(x)=x^۳+x-۸$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی f و $f^{-۱}$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

حل:

$$x_۱<x_۲\Rightarrow\begin{cases}x_۱^۳<x_۲^۳\\ x_۱<x_۲\end{cases}\Rightarrow x_۱^۳+x_۱<x_۲^۳+x_۲\Rightarrow x_۱^۳+x_۱-۸<x_۲^۳+x_۲-۸$$
$$\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

در نتیجه تابع f صعودی اکید است.

بنابراین برای محاسبه محل تلاقی f و $f^{-۱}$ کافی است محل تلاقی f و خط $y=x$ را در صورت وجود محاسبه کنیم.

$$\begin{cases}y=x^۳+x-۸\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x^۳+x-۸=x\Rightarrow x^۳=۸\Rightarrow x=۲\ ,\ y=۲$$
$$\Rightarrow d=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

مثال: نقاط برخورد تابع $f(x)=x-\sqrt{x+1}$ را با وارونش، در صورت وجود پیدا کنید.

دلخواه $x_1, x_2 \in [-1, +\infty) \quad , \quad x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1 + 1} < x_2 + \sqrt{x_2 + 1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f صعودی اکید است.

برای پیدا کردن نقطه‌ی برخورد داریم:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x + \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow x = x + \sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1 \ , \ y = -1$$

تمرین:

۱- نقطه‌ی برخورد تابع $f(x)=x^3+2x$ را با وارونش، در صورت وجود به دست آورید.

۲- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ با وارونش چند نقطه‌ی تلاقی دارند؟ مختصات آن‌ها را به دست آورید.

۳- آیا ممکن است نقطه‌ی تلاقی f و f^{-1} در صورت وجود، روی خطی غیر از خط $y=x$ قرار گیرد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۴- اگر تابع $f(x)=(a+1)x^4+(a+2)x^3+(a+4)x^2+3x$ با دامنه $\Re$ وارون‌پذیر باشد، وارون آن خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

توابع متناوب

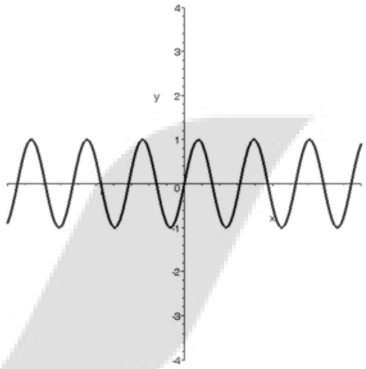
❖ **تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد، که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:**

$$f(x+T) = f(x) \ , \ x+T \in D_f$$

❖ **کوچک‌ترین عدد T با خاصیت‌های بالا را دوره تناوب f می‌نامند.**

مثال: با استفاده از رسم نمودار دوره تناوب تابع $y = \sin x$ را تعیین کنید.

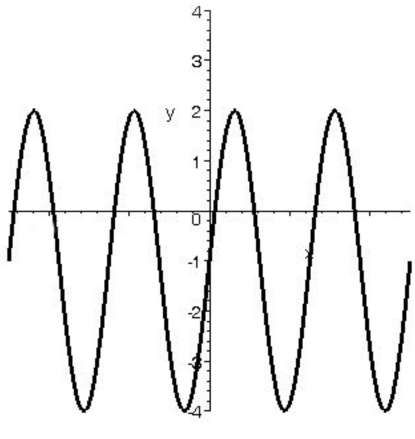
حل:



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود کمترین طولی که نمودار تابع در آن عیناً تکرار می‌شود ۲πاست. پس دوره تناوب تابع $T = ۲\pi$ می‌باشد.

مثال: دوره تناوب تابع $y = ۳\sin x - ۱$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به اینکه برای رسم نموار تابع $y = ۳\sin x - ۱$ می‌توانیم ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم و نمودار را با یک انبساط در جهت محور yها و یک انتقال به راست، نمودار تابع را رسم کنیم در واقع دوره تناوب این تابع با تابع $y = \sin x$ یکسان است. این مطلب در شکل زیر به خوبی قابل مشاهده می‌باشد.



توجه: در حالت کلی اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد توابع $y = af(x)+b$ نیز متناوب با همان دوره تناوب T خواهند بود. ولی دوره تناوب تابع $y = f(ax)$ برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ است. (به علت انقباض و انبساط در جهت محور xها).

مثال: آیا تابع $y=\sqrt{۱-x^{۲}}$ متناوب است؟ چرا؟

حل: خیر- زیرا $D_f=[-۱\,,۱]$ و شرط $x+T\in D_f$ نمی‌تواند برای تابع برقرار باشد.

مثال: آیا تابع $y=۲$ متناوب است؟ در صورت متناوب بودن دوره تناوب آن را تعیین کنید.

حل: دامنه تعریف تابع برابر $\Re$ است. پس T هر عدد حقیقی مثبت که باشد داریم:

$$\begin{cases} x+T\in D_f \\ f(x+T)=f(x) \end{cases}$$

پس تابع متناوب است. اما چون کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد، پس دوره تناوب ندارد.

تمرین:

دوره تناوب توابع زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $f(x)=\pi$ ب) $f(x)=\cos x$

ج) $f(x)=۲\cos x-۴$ د) $f(x)=\sin ۳x$

هـ) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ و) $f(x)=۱-۳\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})$

❖ برای تعیین دوره تناوب می‌توانیم از دستورهای زیر استفاده کنیم:

۱) $y=\sin^{۲n-۱}(ax)\ ,\ y=\cos^{۲n-۱}(ax)\ \overset{n\in N}{\Rightarrow}\ T=\frac{۲\pi}{|a|}$

۲) $y=\sin^{۲n-۱}(ax)\ ,\ y=\cos^{۲n-۱}(ax)\ \overset{n\in N}{\Rightarrow}\ T=\frac{۲\pi}{|a|}$

۳) $y=\sin^{۲n}(ax)\ ,\ y=\cos^{۲n}(ax)\ ,\ y=\tan^{n}(ax)\ ,\ y=\cot^{n}(ax)\ \overset{n\in N}{\Rightarrow}\ T=\frac{\pi}{|a|}$

۴) $y=|\sin(ax)|\ ,\ y=|\cos(ax)|\ ,\ y=|A\sin(ax)+B\cos(ax)|\Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$

مثال: دوره تناوب توابع زیر را تعیین می‌کنیم.

۱) $y=\sin^{۳}(۲x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$

۲) $y=\sin^{۲}(۲x)\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$

$$۳)\ \ y = -۳\sin(۲x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

$$۴)\ \ y = \sin^{۳}(۲x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

$$۵)\ \ y = \frac{\pi}{۴} - ۳\sin(۱-۲x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|-۲|} = \pi$$

$$۶)\ \ y = \tan^{۲}(۳x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{۳}$$

$$۷)\ \ y = ۴ - ۲\cot^{۲}\left(\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x\right) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|-۳\pi|} = \frac{۱}{۳}$$

مثال: دوره تناوب تابع $y_۱ = \sin(\frac{۲}{۳}x + \frac{\pi}{۶}) - ۱$ چند برابر دوره تناوب تابع $y_۲ = \sin^{۲}(\frac{۳}{۲}x)$ است.

حل:

$$T_۱ = \frac{۲\pi}{\frac{۲}{۳}} = ۳\pi \ \ ,\ \ T_۲ = \frac{\pi}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{T_۱}{T_۲} = \frac{۳\pi}{\frac{۲\pi}{۳}} = \frac{۹}{۲}$$

تمرین:

دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y = ۳\cos^{۲}(۴x) - ۱$

ب) $y = -۲\sin^{۳}(۱-۲x) + ۷$

ج) $y = \sin^{۲}(\frac{۳\pi}{۵} - \frac{۲x}{۳}) - ۱$

د) $y = \sqrt{\sin ۴x}$

هـ) $y = \sqrt{\cos ۲x + ۱}$

و) $y = \begin{cases} ۱ & ,\ x \in E \\ ۰ & ,\ x \in O \end{cases}$

ز) $y = \begin{cases} ۱ & ,\ x \in Q \\ ۰ & ,\ x \in Q^{c} \end{cases}$

(Q، Q^{c}، E و O به ترتیب مجموعه‌های اعداد گویا، گنگ، زوج طبیعی و فرد طبیعی هستند.)

❖ **توابع زیر متناوب نیستند:**

- **توابع مثلثاتی که در آن کمان x زیر رادیکال و یا توانی غیر از یک داشته باشد متناوب نیستند.**
- **هر گاه در تابع، کمان با یکی از چهار عمل اصلی با نسبت مثلثاتی قرار گیرد، تابع متناوب نیست.**

مثال: توابع زیر متناوب نیستند.

الف) $y=\cos\frac{۱}{x}$ ب) $y=\sin x^{۲}$

ج) $y=\tan\sqrt[۳]{x}$ د) $y=x-\sin x$

هـ) $y=\sin|x|$

تمرین:

از بین توابع زیر توابع متناوب را مشخص کرده، دوره تناوب آن‌ها را تعیین کنید.

الف) $y=\cos|x|$ ب) $y=x\cos x$

ج) $y=\sqrt{x}+\tan x$ د) $y=\cot\frac{۱}{x}$

هـ) $y=\sin(۱-۲\pi x)$ و) $y=x^{۲}+\cos x$

جزء صحیح

❖ **برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ یا $\lfloor x\rfloor$ نمایش می‌دهیم. یعنی برای هر عدد حقیقی x یک عدد صحیح p موجود است به طوری که:**

$$p\le x<p+۱\Rightarrow [x]=p$$

مثال:

الف) $\left[-\frac{\pi}{۳}\right]=-۲$ ب) $\left[\frac{\pi}{۳}\right]=۱$

ج) $\left[-\sqrt{۳}\right]=-۲$ د) $[\log ۱۷۶]=۲$

هـ) $\left[\sin\frac{۷\pi}{۴}\right]=-۱$

مثال: معادلات زیر را حل می‌کنیم.

۱) $[x]=۳\Rightarrow ۳\le x<۴$

۲) $\left[\frac{۱-۲x}{۳}\right]=۴\Rightarrow ۴\le\frac{۱-۲x}{۳}<۵\Rightarrow ۱۲\le ۱-۲x<۱۵\Rightarrow ۱۱\le -۲x<۱۴\Rightarrow -۷<x\le -\frac{۱۱}{۲}$

۳) $[x]^{۲}-۳[x]+۲=۰\Rightarrow ([x]-۲)([x]-۱)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}[x]-۲=۰\Rightarrow [x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳\\ [x]-۱=۰\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow ۱\le x<۲\end{cases}\Rightarrow ۱\le x<۳$$

۴) $[\log x]=۴\Rightarrow ۴\le\log x<۵\Rightarrow ۱۰^{۴}\le x<۱۰^{۵}$

۵) $۳[x]=۲\Rightarrow [x]=\frac{۲}{۳}$ جواب ندارد

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x] < ۲$ ب) $[x] \le ۲$

ج) $[x] < -\frac{۱}{۲}$ د) $[x] \le -\sqrt{۲}$

هـ) $\left[\frac{۳x+۱}{۲} < ۴\right]$ و) $[x]^۲ - ۳[x] + ۲ < ۰$

ز) $[\log_۲^x] < ۸$

حل:

الف) $[x] < ۲ \Rightarrow [x] \le ۱ \Rightarrow \quad x < ۲$

ب) $[x] \le ۲ \Rightarrow \quad x < ۳$

ج) $[x] < -\frac{۱}{۲} \Rightarrow [x] < -\frac{۱}{۲} < ۰ \Rightarrow x < ۰$

د) $[x] \le -\sqrt{۲} \Rightarrow [x] \le -\sqrt{۲} < -۱ \Rightarrow x < -۱$

هـ) $[\frac{۳x+۱}{۲}] < ۴ \Rightarrow \frac{۳x+۱}{۲} < ۴ \Rightarrow ۳x+۱ < ۸ \Rightarrow x < \frac{۷}{۳}$

و) $[x]^۲ - ۳[x] + ۲ < ۰ \overset{[x]=t}{\Rightarrow} t^۲ - ۳t + ۲ < ۰ \quad \Rightarrow ۱ < t < ۲ \quad \Rightarrow ۱ < [x] < ۲$ جواب ندارد

ز) $[\log_۲^x] < ۹ \Rightarrow \log_۲^x < ۹ \Rightarrow x < ۲^۹$

تمرین:

نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[۱ - x] \le ۳$ ب) $-۱ \le [\frac{x+۲}{۳}] \le ۴$

ج) $\frac{۱}{[x]} \le ۲$ د) $-۲ < [\frac{۱-۳x}{۵}] \le ۳$

هـ) $-[x]^۲ + [x] + ۶ < ۰$ و) $[x]^۲ \le [x] + ۱۲$

❖ **دستورهای زیر برای جزء صحیح همواره برقرار است.**

$$[x \pm k] \overset{k \in z}{\Rightarrow} [x] \pm k$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$$

$$۰ \le x - [x] < ۱$$

$$x - ۱ < [x] \le x$$

$$[x] + [x + \frac{۱}{n}] + [x + \frac{۲}{n}] + ... + [x + \frac{n-۱}{n}] = [nx]$$

$$x > ۰ \Rightarrow [x] \ge ۰$$

$$x < ۰ \Rightarrow [x] < ۰$$

مثال: معادله‌ی $[x]+[x+۳]-[x+۲]=۵$ را حل کنید.

حل:

$$[x]+[x]+۳-[x]-۲=۵ \Rightarrow [x]=۴ \Rightarrow ۴\le x<۵$$

مثال: معادله‌ی $۴[x^۲]+x=۵$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} ۴[x^۲]\in z \\ ۴[x^۲]+x=۵ \end{cases} \Rightarrow x\in z \Rightarrow x^۲\in z \Rightarrow ۴x^۲+x-۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۵}{۴} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $[x]+[-x]=\frac{۱}{x-[x]}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم

$$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in z \\ -۱ & x\notin z \end{cases}$$

با توجه به اینکه صورت کسر طرف دوم عدد یک است پس طرف اول صفر نمی‌تواند باشد، بنابراین $x\notin z$ و برابر -۱ است و داریم:

$$-۱=\frac{۱}{x-[x]} \Rightarrow x-[x]=-۱ \overset{۰<x-[x]<۱}{\Rightarrow} \text{جواب ندارد}$$

مثال: معادله $[۲[x]+x]=-۹$ را حل کنید.

حل:

$$۲[x]+[x]=-۹ \Rightarrow ۳[x]=-۹ \Rightarrow [x]=-۳ \Rightarrow -۳\le x<-۲$$

مثال: معادله $\frac{x^۲-[x]}{[-x]}=۱$ را حل کنید.

حل:

$$x^۲-[x]=[-x] \Rightarrow x^۲=[x]+[-x]$$

حالت اول: اگر $x\in Z$ داریم $x^۲=۰$ و از آنجا $x=۰$.

حالت دوم: اگر $x\notin Z$ داریم $x^۲=-۱$ که دارای جواب نیست.

تمرین:

۱- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x+۳]+[x]=۲+[۴-x]$

ب) $[\frac{۲x-۱}{x}]=-۱$

ج) $[\frac{x-۱}{x-۲}]=۴$

د) $\frac{۱}{[x]}+[x]=-۲$

هـ) $[x]+[x+\frac{۱}{۲}]=۵$

۲- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x]+[x-۲]+[x+۱]\le ۲[x-۳]$ ب) $[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۲}{۳}\right]>-۱$

ج) $x>[x]+۲$ د) $[x]<۳+x$

هـ) $[x]+[-x]+۱>x$

❖ **تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x)=[x]$ نمایش داده می‌شود.**

مثال: دامنه و برد تابع $f(x)=۲[x]-\frac{۳}{۲}$ را تعیین کنید.

حل :

$$D_f=\Re,$$
$$x\in\Re\Rightarrow[x]=k\in Z\Rightarrow ۲[x]=۲k\Rightarrow ۲[x]-\frac{۳}{۲}=۲k-\frac{۳}{۲},\ k\in Z$$
$$\Rightarrow R_f=\left\{۲k-\frac{۳}{۲}\mid k\in Z\right\}$$

مثال: دامنه و برد تابع $y=\sqrt{[x]+[-x]}$ را تعیین کنید.

حل: می‌دانیم

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$D_f=Z,$$
$$x\in z\Rightarrow[x]+[-x]=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow R_f=\{۰\}$$

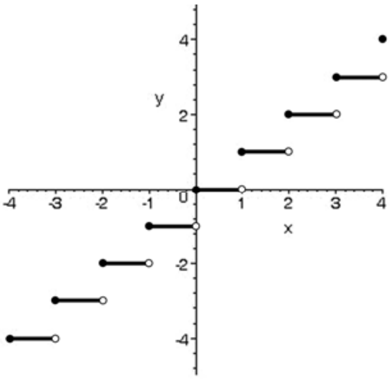
مثال: دامنه و برد تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x-[x]}}$ را تعیین کنید.

حل: لازم است $x-[x]>۰$ باشد،

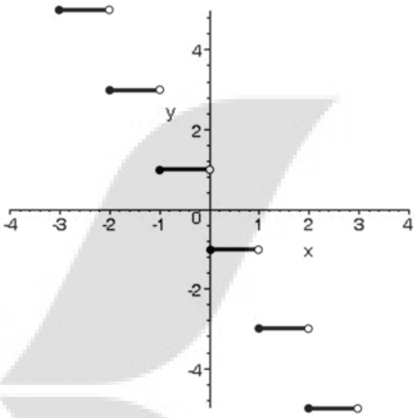
$$۰\le x-[x]<۱\overset{x-[x]>۰}{\Rightarrow}x-[x]\ne۰\Rightarrow x\ne[x]\Rightarrow x\notin Z\Rightarrow D_f=\Re-Z,$$
$$x\in\Re-Z\Rightarrow ۰<x-[x]<۱\Rightarrow ۰<\sqrt{x-[x]<۱}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{x-[x]}}>۱\Rightarrow R_f=(۱,+\infty)$$

مثال: نمودار تابع $y=-۲[x]-۱$ را رسم کنید.

حل: می‌دانیم نمودار تابع $y=[x]$ به صورت مقابل است.



پس لازم است ابتدا yهای نقاط این نمودار در ۲- ضرب شود، سپس تمام نقاط آن یک واحد به سمت پایین انتقال یابد. بنابراین نمودار به صورت زیر در می‌آید.



مثال: نمودار تابع $y=[\sqrt{x}]$ را در فاصله‌ی $[۰\,,۹)$ رسم کنید.

حل: داریم

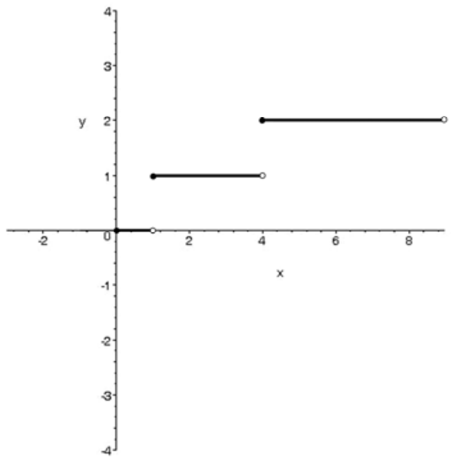
$$۰\le x<۹\Rightarrow ۰\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow[\sqrt{x}]=۰\,,۱\,,۲$$

$$[\sqrt{x}]=۰\Rightarrow ۰\le\sqrt{x}<۱\Rightarrow ۰\le x<۱\,,\ y=۰$$

$$[\sqrt{x}]=۱\Rightarrow ۱\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow ۱\le x<۴\,,\ y=۱$$

$$[\sqrt{x}]=۲\Rightarrow ۲\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow ۴\le x<۹\,,\ y=۲$$

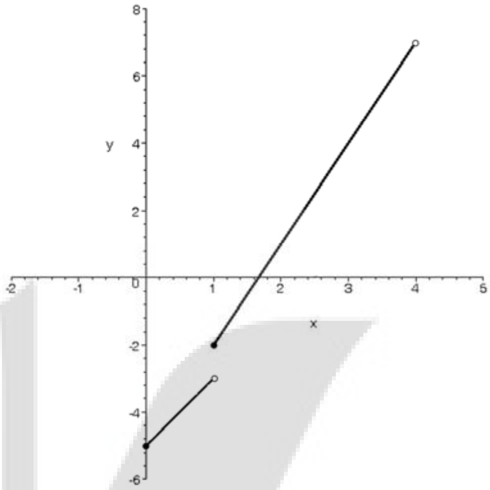
و نمودار به صورت زیر در می‌آید.



مثال: نمودار تابع $y = x[\sqrt{x}] + ۲x - ۵$ را در فاصله‌ی $[۰ , ۴)$ رسم کنید.

حل:

$$۰ \le x < ۴ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{x} < ۲ \Rightarrow \left[\sqrt{x}\right] = ۰ , ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\sqrt{x}\right] = ۰ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{x} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۰ \le x < ۱ \\ y = ۲x - ۵ \end{cases} \\ \left[\sqrt{x}\right] = ۱ \Rightarrow ۱ \le \sqrt{x} < ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱ \le x < ۴ \\ y = ۳x - ۵ \end{cases} \end{cases}$$



تمرین:

۱- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = x - [x] \quad , \quad [-۲ , ۲]$

ب) $y = [x] + [-x] \quad , \quad [-۳ , ۳]$

ج) $y = [۲x] - ۱ \quad , \quad (-۱ , ۳)$

د) $y = ۳\left[\dfrac{x}{۴}\right] - ۱ \quad , \quad (۰ , ۱]$

هـ) $y = [x] - x + ۱ \quad , \quad (-۳ , ۱)$

و) $y = [-۲x] \quad , \quad (-۲ , ۱]$

۲- دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y = \dfrac{۱}{[x]}$

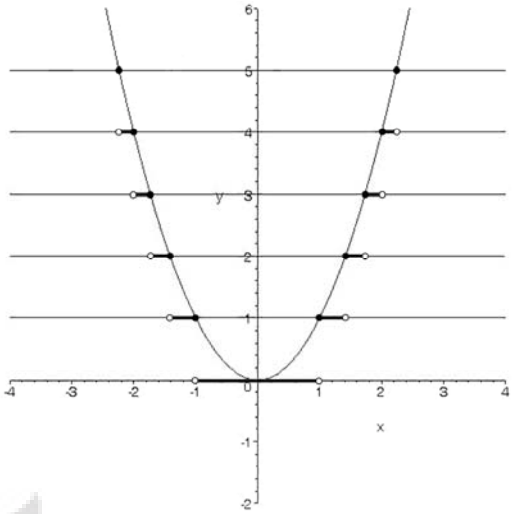
ب) $y = [x] - ۳$

ج) $y = \dfrac{\sqrt{[x]}}{۳}$

❖ **برای رسم نمودار تابع $f(x) = [g(x)]$ ، می‌توانیم ابتدا نمودار تابع $y = g(x)$ را رسم کنیم. سپس خطوط $y = k \; , k \in z$ را رسم نموده و در انتها هر قسمت از نمودار را که بین دو خط افقی متوالی قرار گرفت را روی خط پایینی تصویر کنیم. محل تلاقی خطوط افقی با نمودار نقطه‌ای توپر می‌باشد.**

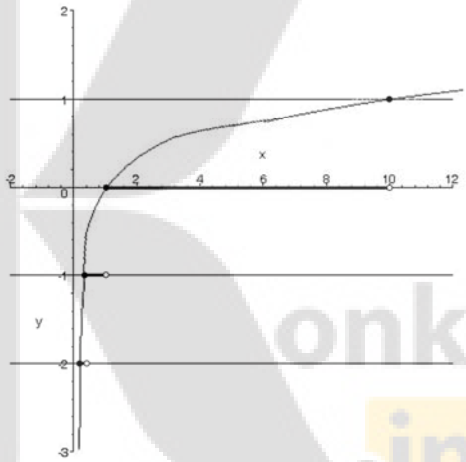
مثال: نمودار تابع $y=[x^{۲}]$ را رسم کنید.

حل:



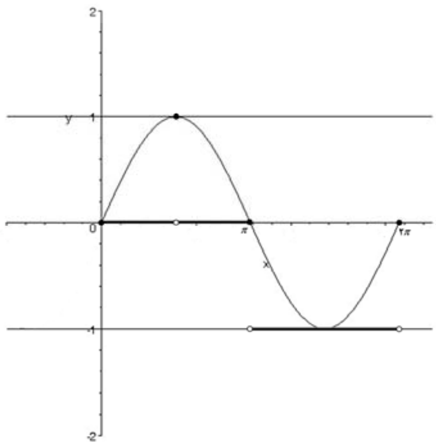
مثال: نمودار تابع $y=[\log x]$ را رسم کنید.

حل:



مثال: نمودار تابع $y=[\sin x]$ را در فاصله‌ی $[۰\,,\,۲\pi]$ رسم کنید.

حل:



تمرین:

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=[\cos x]\quad , \quad [۰\,,\,۲\pi]$

ب) $y=\left[۲x+\frac{۱}{۲}\right]$

ج) $y=\left[x^{۲}-۲x\right]$

د) $y=[\sin x]-۱\quad , \quad [-۲\pi\,,\,۰]$

هـ) $y=[۱-\cos x]\quad , \quad [۰\,,\,۲\pi]$

و) $y=\left[۳^{x}\right]$

تمرین‌های تکمیلی:

۱- آیا توابع $f(x)=\frac{۲x-۱-x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}-۲x\ +۱}}$ و $g(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>۱\\ x-۱ & x<۱\end{cases}$ مساویند؟

۲- آیا توابع:

$$f(x)=\begin{cases}[\frac{۱}{x-۱}]-[\frac{۱}{x+۱}]+۲ & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases}[\frac{x}{x-۱}]-[\frac{-x}{x+۱}] & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

مساویند؟

۳- اگر $f=\{(۱\,,\,۳),(۲\,,\,-۱),(۳\,,\,۲),(۴,۰)\}$ و $g=\{(۱\,,\,۳),(۳\,,\,۰),(-۱\,,۵),(۰,۱)\}$ مطلوب است تعیین توابع:

الف) gof

ب) $\left(\frac{۱}{f}og\right)^{-۱}$

ج) $f^{-۱}\left(\frac{x}{۲}\right)$

د) $f^{-۱}(۲x)$

هـ) $\frac{f}{g-۱}+۲g$

و) $۳\,fo(g+۱)^{-۱}$

ز) $۲f\times(fog)^{-۱}$

ح) $\frac{۲-g^{-۱}}{۳f}$

۴- اگر $f=\{(۲\,,\,۳),(۱\,,\,۴),(۰\,,\,۵),(-۲,۰)\}$ و $g(x)=-۴x$ مطلوب است تعیین توابع:

الف) $g^{-۱}of^{-۱}$

ب) $(fog)^{-۱}$

ج) $\frac{۲-f^{-۱}}{۳g}$

د) $f^{-۱}o\,g^{-۱}-(g-۱)^{-۱}$

هـ) $\frac{f^{-۱}(۲x)}{g^{-۱}\left(\frac{x}{۲}\right)}$

و) $\left(\frac{۱}{g}\right)^{-۱} of$

۵- اگر $f=\{(۱\,,\,۲)\,,\,(۲\,,\,۵)\,,\,(۵\,,\,a)\}$ و توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ مساوی باشند a را بیابید.

۶- اگر $f(۲)+f(x-۱)=x^{۲}+۵x$ ضابطه تابع f را بیابید.

۷- اگر $f(-۱)+f(۳x+۴)=۲x^{۲}+۱$ ضابطه تابع f را بیابید.

۸- اگر $2f(x+5)-3f(1)=x+f(2)$، مقدار $f(0)$ را بیابید.

۹- اگر دامنه تابع f بازه $(-\infty , 3)$ و برد آن بازه $(-1 , +\infty)$ باشد. دامنه تابع $y=f^{-1}(\frac{x}{2})$ را بیابید.

۱۰- اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب بازه‌های $[-2 , 3] , [-1 , +\infty]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=f^{-1}(-3x+1)-2$ را بیابید.

۱۱- اگر $f=\left\{(4,\frac{1}{2}) , (5 , \frac{3}{2}) , (3 , \frac{1}{4}) , (0 , 2)\right\}$ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{f}(\frac{x}{2}-1)=2$ ب) $f^{-1}(2x+1)=3$

۱۲- اگر $g(x)=f(3x-4)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ ، حاصل $g^{-1}(16)$ را بیابید.

۱۳- اگر $D(x)$ تابع دیریکله و تابع $u_c(t)$ تابع پله‌ای واحد باشند مطلوب است تعیین توابع زیر:

الف) $Dou_5(t)$ ب) $u_5oD(t)$

ج) $DoD(t)$ د) $u_5ou_5(t)$

۱۴- ضابطه‌های توابع چند رابطه‌ای زیر را مشخص کنید.

الف) $u_\pi(t)-u_{2\pi}(t)$ ب) $t^3\left(u_0(t)-u_1(t)\right)$

۱۵- توابع زیر را بر حسب $u_c(t)$ بنویسید.

الف) $f(x)=1 \quad 2\le x<8$ ب) $g(x)=3 \quad 5\le x<8$

ج) $h(x)=x^2 \quad 5\le x<10$ د) $k(x)=\sin x \quad 0\le x<2\pi$

۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2x & x<0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x^2 & x>-1 \\ \frac{x}{2} & x\le -1 \end{cases}$ ضابطه‌های توابع fog و gof را مشخص کنید.

۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases} 5x+1 & x<2 \\ 4-x^2 & x\ge 2 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} 4-5x & x<1 \\ 2x+3 & x\ge 1 \end{cases}$ ضابطه‌های توابع fog و gof را بیابید.

۱۸- اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{x} & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ ضابطه تابع fof را بیابید.

۱۹- اگر تابع f با دامنه $[-1 , 2]$ صعودی (اکید) و $f(1)=0$ دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $g(x)=\sqrt{(1-x)\ f(x)}$ ب) $h(x)=\sqrt{x\,f(3-x)}$

ج) $k(x)=\sqrt{(2+x)\ f(\frac{x}{2})}$ د) $m(x)=\sqrt{\left(4x^2-x^3\right)\ f\left(\frac{x}{3}+1\right)}$