۱- به کمک نتیجه‌ی تمرین ۹، حاده (تند) ، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه‌ی A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید.

الف) $BC = ۹ \ , \ AC = ۶ \ , \ AB = ۱۰$

ب) $BC = ۹ \ , \ AC = ۴ \ , \ AB = ۸$

پ) $BC = ۱۷ \ , \ AC = ۱۵ \ , \ AB = ۸$

« **پاسخ** »

الف) $a = ۹ \ , \ b = ۶ \ , \ c = ۱۰$

$$a^۲ = ۸۱ \ , \ b^۲ + c^۲ = ۱۳۶ \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} < ۹۰^\circ$$

ب) $a = ۹ \ , \ b = ۴ \ , \ c = ۸$

$$a^۲ = ۸۱ \ , \ b^۲ + c^۲ = ۸۰ \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} > ۹۰^\circ$$

پ) $a = ۱۷ \ , \ b = ۱۵ \ , \ c = ۸$

$$a^۲ = ۲۸۹ \ , \ b^۲ + c^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ$$

۲- به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC:

الف) $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ > c^۲$

ب) $\widehat{A} < ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$

پ) $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

« **پاسخ** »

الف) $\widehat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A < ۰ \xrightleftharpoons[\div bc]{\times bc} bc.\operatorname{Cos} A < ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A > ۰$

$$\xrightleftharpoons[-\left(b^۲ + c^۲\right)]{+\left(b^۲ + c^۲\right)} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} A > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$$

ب) $\widehat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A > ۰ \xrightleftharpoons[\div bc]{\times bc} bc.\operatorname{Cos} A > ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A < ۰$

$$\xrightleftharpoons[-\left(b^۲ + c^۲\right)]{+\left(b^۲ + c^۲\right)} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} a < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$$

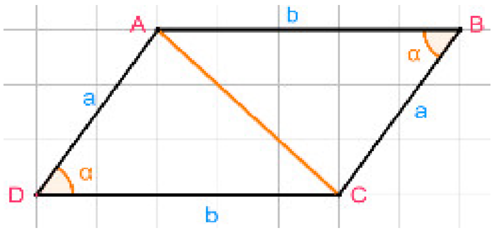
پ) $\widehat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A = ۰ \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc.\operatorname{Cos} A = ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A = ۰$

$$\xrightleftharpoons[-\left(b^۲ + c^۲\right)]{+\left(b^۲ + c^۲\right)} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} A = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

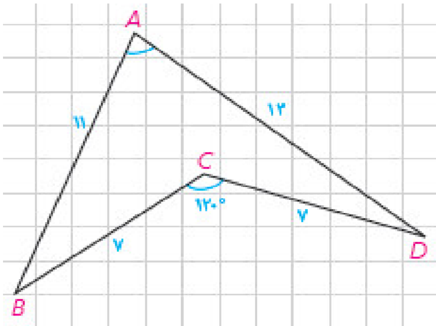
۳- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.

« **پاسخ** »

با توجه به خواص متوازی‌الاضلاع داریم:



$$S_{ABCD} = ۲S_{ABC} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$$
$$\Rightarrow S_{ABCD} = a.\,b\sin\alpha$$



۴- در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.

راهنمایی: B را به D وصل کنید.

« پاسخ »

مثلث BCD متساوی‌الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام °۳۰ خواهد بود.

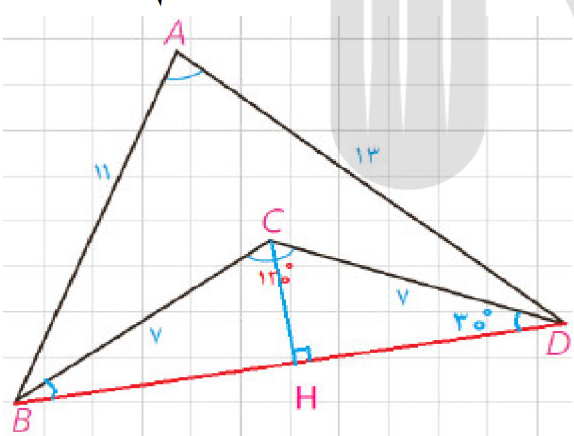
در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = ۳۰^\circ$ در نتیجه: $CH = \frac{۷}{۲}$

$$\left.\begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۲} \times BD = \frac{۷}{۴}BD \\ S_{BCD} &= \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۷ \times \operatorname{Sin} ۱۲۰^\circ = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۷}{۴}BD = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$P_{ABD} = \frac{۱۱ + ۱۳ + ۷\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۷\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۱\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۳\right)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ - \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} + ۱\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱\right)}$$



$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۴۴ - \frac{۱۷۴}{۴}\right)\left(\frac{۱۴۷}{۴} - ۱\right)} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} \quad (۱)$$

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} \times ۱۱ \times ۱۳ \times \operatorname{Sin} A = \frac{۱۴۳}{۲}\operatorname{Sin} A \quad (۲)$$

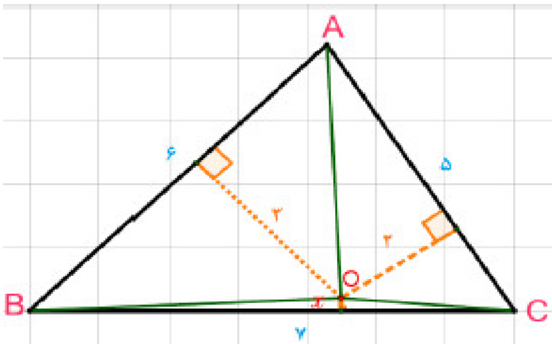
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱۴۳}{۲}\operatorname{Sin} A = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} \Rightarrow \operatorname{Sin} A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = ۶۰$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} - \frac{۴۹}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۹۴}{۴}\sqrt{۳}$$

۵- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

« پاسخ »



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{۵ + ۶ + ۷}{۲} = ۹$$

$$S_{ABC} = \sqrt{۹ \times ۲ \times ۳ \times ۴} = ۶\sqrt{۶}$$

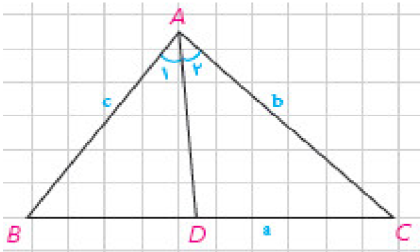
$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۳ = ۹$$

$$S_{AOC} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۲ = ۵$$

$$S_{BOC} = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times x = \frac{۷}{۲}x$$

$$۶\sqrt{۶} = ۹ + ۵ + \frac{۷}{۲}x \Rightarrow ۶\sqrt{۶} - ۱۴ = \frac{۷}{۲}x \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}\left(۶\sqrt{۶} - ۱۴\right) \approx ۰/۲$$

۶- در شکل زیر AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است.
با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی A به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A$$

$$= \frac{۱}{۲} \ldots \times \ldots \times \sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲} \ldots \times \ldots \times \sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{۲}(\ldots + \ldots)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{(\ldots + \ldots)\ \sin\frac{A}{۲}} = \frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(\ldots + \ldots)\sin\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = \ldots$$

$$\Rightarrow (\text{نیمساز راس A})\ d_a = \frac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$

« **پاسخ** »

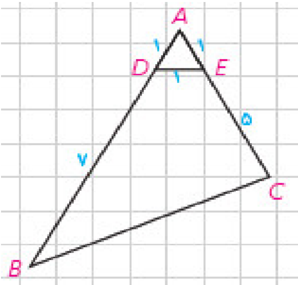
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A = \frac{۱}{۲} AB \times AD \times \sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲} AC \times AD \times \sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{۲}(AB + AC) \Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{(AB+AC)\sin\frac{A}{۲}}$$

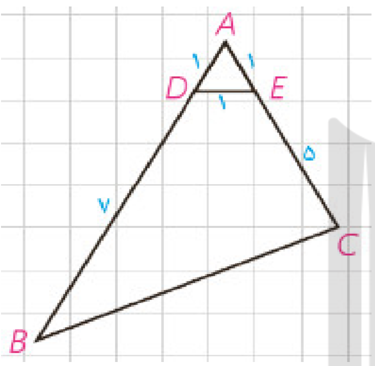
$$= \frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(AB+AC)\sin\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (\text{نیمساز راس A})\, d_a = \frac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$

۷- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



« **پاسخ** »

با توجه به این‌که مثلث ADE متساوی‌الساقین است پس $\widehat{DAE} = ۶۰^\circ$ در نتیجه:



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\cos A$$

$$BC^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۲\times۶\times۸\times\frac{۱}{۲} = ۵۲$$

$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

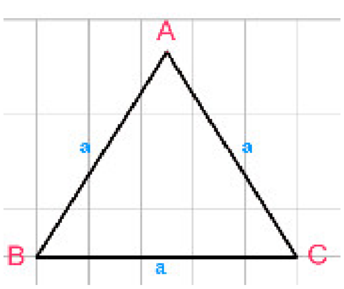
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.AB.AC.\sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^۲ = S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{BCED} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۸- دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

« **پاسخ** »

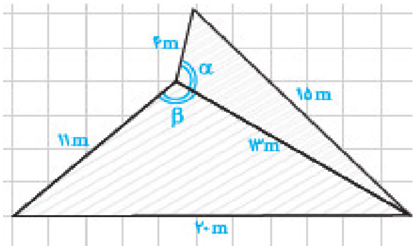


$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{۳a}{۲}$$

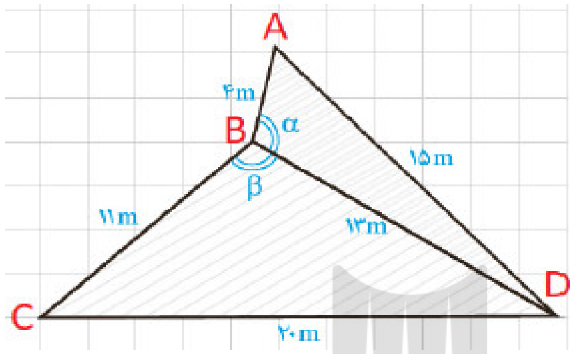
$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)^۳} = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\left(\frac{a}{۲}\right)^۳}$$

$$= \sqrt{\frac{۳a^۴}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۹- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چه‌قدر می‌شود؟
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha = \beta)$



« **پاسخ** »



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$P_{ABD} = \frac{۴ + ۱۳ + ۱۵}{۲} = ۱۶m$$

$$P_{BCD} = \frac{۱۱ + ۱۳ + ۲۰}{۲} = ۲۲m$$

$$S_{ABD} = \sqrt{۱۶ \times ۱۲ \times ۳ \times ۱} = ۲۴m^۲$$

$$S_{BCD} = \sqrt{۲۲ \times ۱۱ \times ۹ \times ۲} = ۶۶m^۲$$

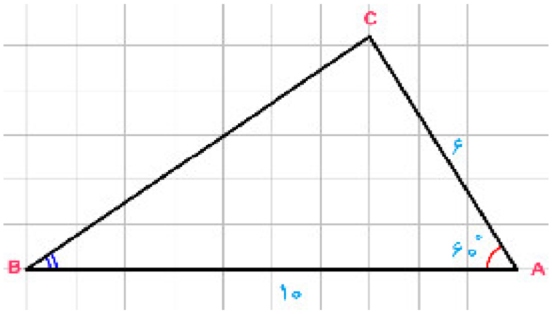
$$S_{ABCD} = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰m^۲$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.BD.\sin\alpha \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۳\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BC.DB.\sin\beta \Rightarrow ۶۶ = \frac{۱}{۲} \times ۱۱ \times ۱۳\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{۱۲}{۱۳} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

۱۰- در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\widehat{A} = ۶۰^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

« **پاسخ** »



الف) $BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\cos A$

$BC^۲ = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۷۶ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$

ب) $\frac{۱}{۲}AC.AB.\sin A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$

پ) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{۶} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

۱۱- با پر کردن جاهای خالی با فرض این‌که در شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$؟

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times \dots}{\frac{۱}{۲}DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۱)$$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times \dots}{\frac{۱}{۲}CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۲)$$

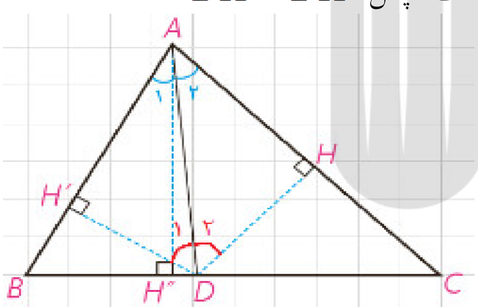
از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

« پاسخ »

الف) راه اول:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \ \widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲} \left\{\begin{array}{l} \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \\ AD = AD \end{array}\right. \rightarrow DH = DH'$$

راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH = DH'$



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AB}{\frac{۱}{۲}DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (۱)$$

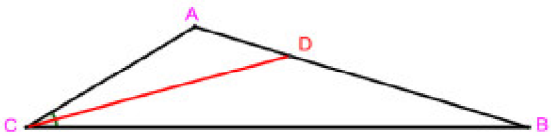
ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times AH''}{\frac{۱}{۲}CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

۱۲- در مثلث ABC، $AB = ۷$ و $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.

« **پاسخ** »



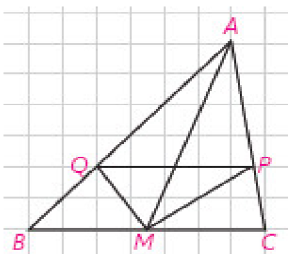
$$CD^{۲} = AC.BC - AD.BC$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰+۴}{۴} = \frac{BD+DA}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۴}{۴} = \frac{۷}{DA} \Rightarrow DA = \frac{۲۸}{۱۴} = ۲ \Rightarrow BD = ۷ - ۲ = ۵$$

$$CD^{۲} = ۴\times۱۰ - ۲\times۵ = ۳۰ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$$

۱۳- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند ؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



« **پاسخ** »

در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است.
پس داریم:

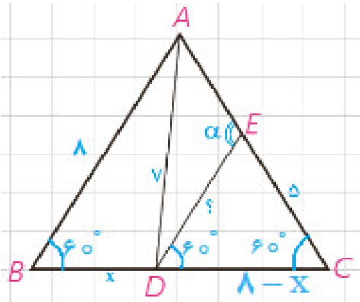
$$\left.\begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB = MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$

۱۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$

به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

« **پاسخ** »



$AB = AC = BC = ۸\ ,\ AD = ۷\ ,\ DB = x$

$DC = x - ۸\ ,\ DB < DC$

$AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB = AD^{۲}.BC + DB.DC.BC$

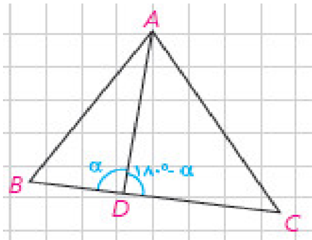
$\Rightarrow ۶۴(۸ - x) + ۶۴x = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$

$\Rightarrow ۶۴ \times ۸ - \cancel{۶۴x} + \cancel{۶۴x} = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$

$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴ = ۴۹ + ۸x - x^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۳\ ,\ x = ۵$

$\xrightarrow{DB < DC} x = DB = ۳\ ,\ DC = ۵$

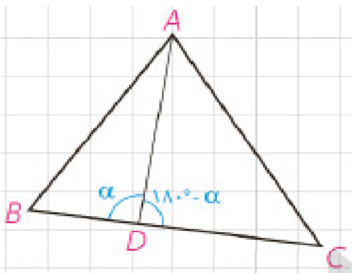
۱۵- در مثلث ABC، نقطه‌ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:



$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB$$
$$= AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$ (قضیه‌ی استوارت)

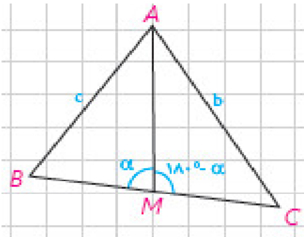
به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

« **پاسخ** »



$$A\overset{\triangle}{B}D : AB^۲ = AD^۲ + DB^۲ - ۲AD . DB . \cos\alpha \xrightarrow{\times DC}$$
$$AB^۲ . DC = DC . AD^۲ + DC . DB^۲ - ۲DC . AD . DB . \cos\alpha \quad (۱)$$
$$A\overset{\triangle}{C}D : AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ - ۲AD . DC . \cos(۱۸۰° - \alpha)$$
$$\xrightarrow{\times DB} AC^۲ . DB = DB . AD^۲ + DB . DC^۲ + ۲DB . AD . DC . \cos\alpha \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱) + (۲)} AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = DC . AD^۲ + DC . DB^۲ - \cancel{۲DC . AD . DB . \cos\alpha}$$
$$+ DB . AD^۲ + DB . DC^۲ + \cancel{۲DB . AD . DC . \cos\alpha} \Rightarrow AB^۲ . DC + AC^۲ . DB$$
$$= AD^۲ \underbrace{(DC + DB)}_{BC} + BD . DC \underbrace{(DC + DB)}_{BC}$$

$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$
$$DC = DB = \frac{a}{۲} , \ AC = b , \Rightarrow AB = c$$
$$\Rightarrow \frac{a}{۲} \times c^۲ + \frac{a}{۲} \times b^۲ = AD^۲ \times a + \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times a \Rightarrow \frac{a}{۲}\left(c^۲ + b^۲\right) = \frac{a}{۲}\left(۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲}\right)$$
$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

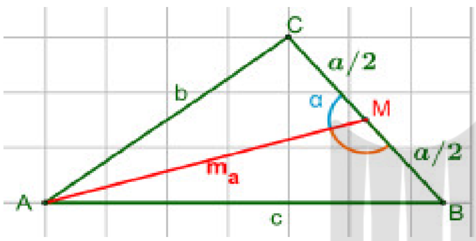


۱۶- در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم $\left(MB = MC = \frac{a}{۲}\right)$. با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیه‌ی میانه‌ها)

در حالت خاص $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۸$، طول میانه AM را به دست آورید.

« **پاسخ** »



$$A\overset{\triangle}{C}M : b^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲ \times \frac{a}{۲} \times m_a \times Cos\alpha$$

$$b^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.Cos\alpha \quad (۱)$$

$$A\overset{\triangle}{B}M : c^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲ \times \frac{c}{۲} \times m_a \times Cos(۱۸۰° - \alpha)$$

$$c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.Cos\alpha \quad (۲)$$

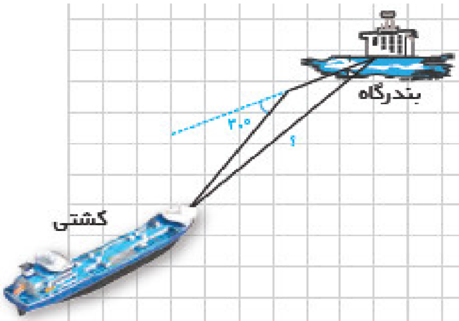
$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.Cos\alpha + \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.Cos\alpha$$

$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM^۲$$

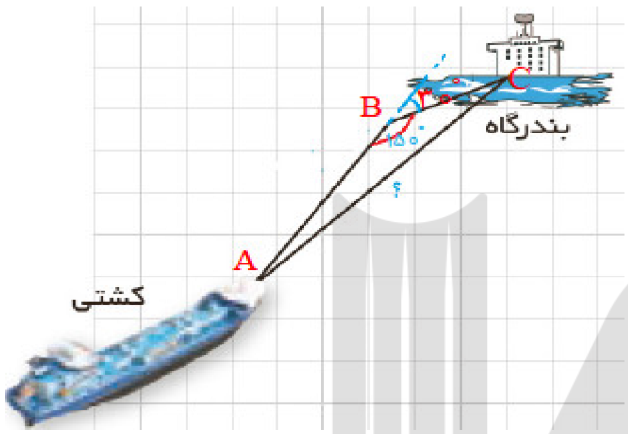
$$AB = c = ۴ \ , \ AC = b = ۶ \ , \ BC = a = ۸$$

$$b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM \Rightarrow AM = \frac{۲\left(b^۲ + c^۲\right) - a^۲}{۴} \Rightarrow AM = \frac{۲(۳۶ + ۱۶) - ۶۴}{۴} \Rightarrow AM = ۱۰$$

۱۷- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



« **پاسخ** »



$$AB = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\,km \ , \ BC = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰\,km$$

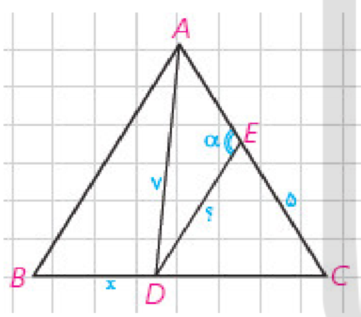
$$AC^۲ = ۶۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲ \times ۶۰ \times ۲۰ \times \cos ۱۵۰^\circ$$

$$= ۳۶۰۰ + ۴۰۰ - ۲ \times ۱۲۰۰ \times \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \right)$$

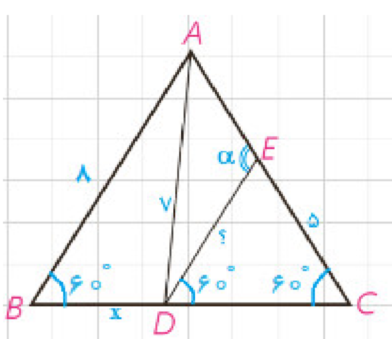
$$\Rightarrow AC^۲ = ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} = ۴۰۰\left(۱۰ + ۳\sqrt{۳}\right)$$

$$\Rightarrow AC = ۲۰\sqrt{۱۰ + ۳\sqrt{۳}}$$

۱۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$ نقطه‌ی E، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟



« **پاسخ** »



$$۷^۲ = x^۲ + ۸^۲ - ۲ \times x \times ۸ \times \sin ۶۰^\circ \Rightarrow ۴۹ = x^۲ + ۶۴ - ۸x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۵ \ , \ x = ۳$$

$$\xrightarrow{BD < DC} BD = ۳ \ , \ DC = ۵$$

$DC = CE = ۵$ در نتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه ۶۰° دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی $DE = ۵$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:

$$\alpha = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ$$