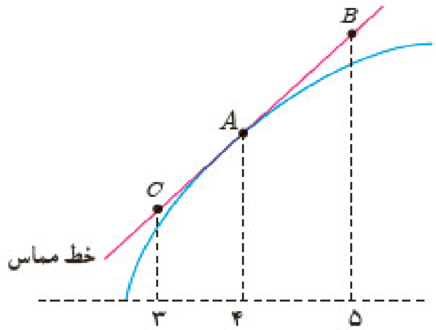
۱- برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۵$ با توجه به شکل مختصات نقاطه A , B و C را بیابید.

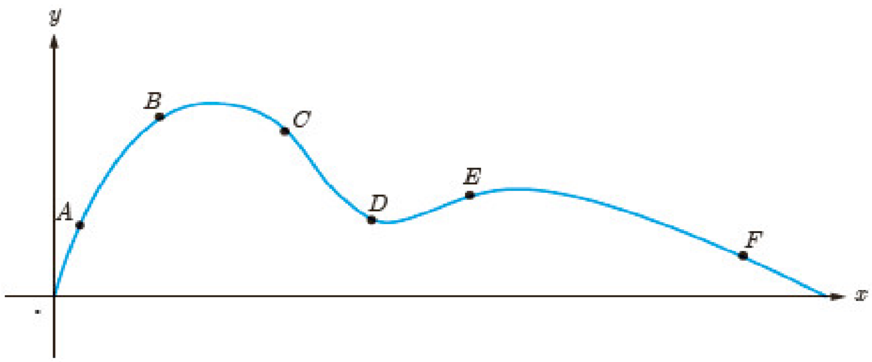


« **پاسخ** »

$$\text{شیب} = \frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} = f'(A) \Rightarrow \frac{f(B) - ۲۵}{۱} = \frac{f(C) - ۲۵}{-۱} = ۱/۵$$

$$\begin{cases} f(B) = ۲۶/۵ \Rightarrow B(۵\ ,\ ۲۶/۵) \\ f(C) = ۲۳/۵ \Rightarrow C(۳\ ,\ ۲۳/۵) \end{cases}$$

۲- نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو درنظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E < m_B < m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

« **پاسخ** »

الف) نادرست $\xrightarrow{\text{مثلا}}$ در نقطه‌ی F شیب منفی است.

ب) نادرست

پ) درست

ت) درست

۳) نادرست $m_C < m_D < m_F$

۴) درست

۳- اگر $f(x) = x^{۳} - ۲$، $f'(-۱)$ را به دست آورید.

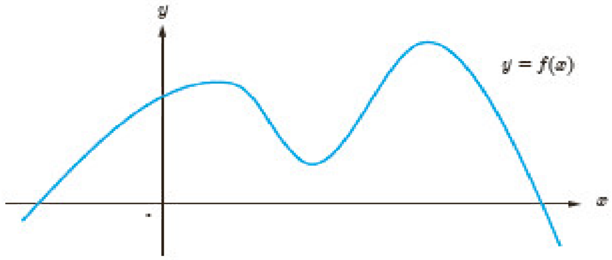
« **پاسخ** »

$f(-۱) = -۳$

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^{۳} - ۲ + ۳}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^{۳}+۱}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{(x+۱)(x^{۲} - x + ۱)}{x+۱}$$

$$= \lim_{x \to -۱} (x^{۲} - x + ۱) = ۳$$

۴- نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری‌که:



الف) A نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

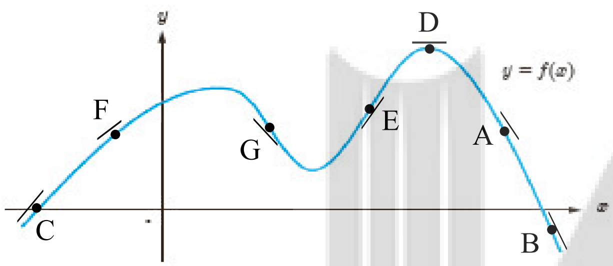
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

« **پاسخ** »



پ) $f(x) = ۰ , f'(x) > ۰$

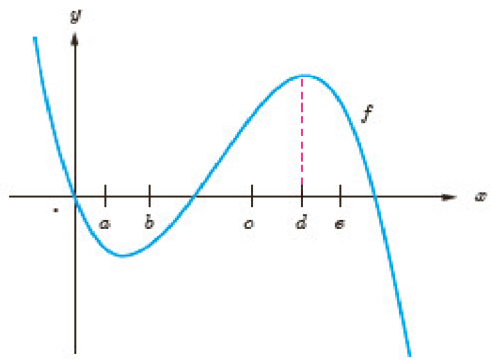
ت) $f'(x) = ۰$

ث) $f'(x_۱) = f'(x_۲)$

ج) $f(x) > ۰ , f'(x) < ۰$

۵- با درنظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a , b , c , d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

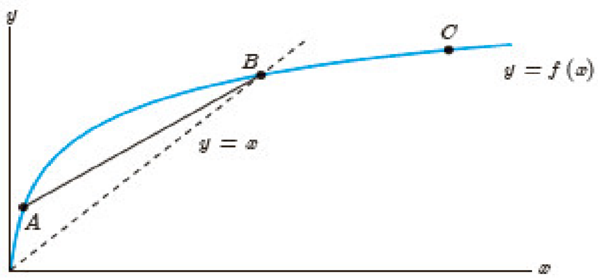
x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵
	-۲



« **پاسخ** »

x	f'[x]
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲

۶- برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y = ۲$

ج) شیب خط $y = x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_۱$, $m_۲$, ... و $m_۶$ درنظر بگیرید.

« **پاسخ** »

الف) $m_۱$

ب) $m_۲$

پ) $m_۳$

ت) $m_۴$

ث) $m_۵ = ۰$

ج) $m_۶ = ۱$

$m_۵ < m_۳ < m_۲ < m_۴ < m_۶ < m_۱$

۷- اگر $f(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۱$، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع برآن بنویسید.

« **پاسخ** »

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x^۲ - ۲x + ۱ - ۹}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x^۲ - ۲x - ۸}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{(x - ۲)(۳x + ۴)}{x - ۲} = \lim (۳x + ۴) = ۱۰$$

معادله خط مماس $y - ۹ = ۱۰(x - ۲) \Rightarrow y - ۹ = ۱۰x - ۲۰ \Rightarrow y = ۱۰x - ۱۱$

۸- تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۰ \\ x^۲ - ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

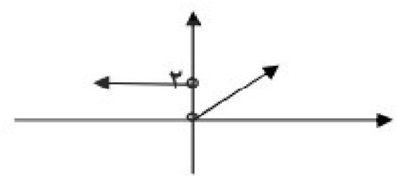
ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

« **پاسخ** »

الف) در $x = ۰$ گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است. ۰/۵ (در صورتی که با مقدار مشتق چپ و راست بررسی کند نمره تعلق می‌گیرد)

ب) $f'(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۰ \\ ۲x & x > ۰ \end{cases}$ ۰/۵

ج)

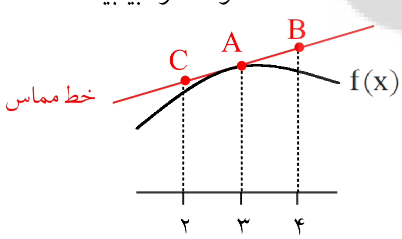


۹- مشتق تابع $f(x) = x^۳ - ۲$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -۱$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(-۱) = \underbrace{\lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ + ۳}{x + ۱}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to -۱} \frac{(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)}{x + ۱}}_{۰/۲۵} = \underbrace{۳}_{۰/۲۵}$$

۱۰- برای تابع f در شکل زیر، $f'(۳) = ۰/۵$ و $f(۳) = ۵$ می‌باشد. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.



« **پاسخ** »

$$A\begin{vmatrix} ۳ \\ ۵ \end{vmatrix}, \quad m = ۰/۵$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۵ = ۰/۵(x - ۳) \Rightarrow y = ۰/۵x + ۳/۵$$

$$C\begin{vmatrix} ۲ \\ ۰/۵(۲) + ۳/۵ \end{vmatrix} \Rightarrow C\begin{vmatrix} ۲ \\ ۴/۵ \end{vmatrix}$$

$$B\begin{vmatrix} ۴ \\ ۰/۵(۴) + ۳/۵ \end{vmatrix} \Rightarrow B\begin{vmatrix} ۴ \\ ۵/۵ \end{vmatrix}$$

۱۱- اگر $f(x) = ۱ - ۲x^۲$ باشد، $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱} \ (۰/۲۵) = \lim_{x \to -۱} \frac{۱ - ۲x^۲ + ۱}{x + ۱} \ (۰/۲۵)$$

$$= \lim_{x \to -۱} \frac{۲(۱ - x)(۱ + x)}{x + ۱} = ۴ \ (۰/۲۵)$$

۱۲- معادله خط مماس بر تابع $y = \frac{x}{(x^۲ + ۶)}$ را در نقطه $(۲ \ , \ ۰/۲)$ پیدا کنید.

« **پاسخ** »

$$y' = \frac{x^۲ + ۶ - ۲x(x)}{(x^۲ + ۶)^۲} = (۰/۵) \ \frac{(-x^۲ + ۶)}{(x^۲ + ۶)^۲} \ (۰/۲۵)$$

$$m = f'(۲) = \frac{۱}{۵۰} \ (۰/۲۵) \quad y - \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵۰}(x - ۲) \xrightarrow{۰/۲۵} y = \frac{۱}{۵۰}x + \frac{۸}{۵۰} \ (۰/۲۵)$$

۱۳- با استفاده از تعریف، معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ را در نقطه‌ی $x = ۱$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$m = \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} \ (۰/۲۵) =$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x - ۱} \ (۰/۲۵) = \lim_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)(x + ۳)}{(x - ۱)} \ (۰/۲۵) = ۴ \ (۰/۲۵)$$

$$y - ۶ = ۴(x - ۱) \Rightarrow (۰/۵) \ y = ۴x + ۲$$

۱۴- معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۱}{۲}$ واقع بر منحنی را به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{-۱}{x^۲}\xrightarrow{۰/۲۵} m=f'\left(\frac{۱}{۲}\right)=-۴ \quad ۰/۲۵ \\ x_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y_۱=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲ \quad ۰/۲۵ \end{array}\right\}\Rightarrow y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۲=-۴\left(x-\frac{۱}{۲}\right) \quad ۰/۲۵$$

$$\Rightarrow y=-۴x+۴ \quad ۰/۲۵$$

۱۵- شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=x^۳-x+۵$ را در نقطه‌ی $x=۱$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$y'=۳x^۲-۱ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow y'(۱)=m=۲ \quad ۰/۲۵$$

۱۶- معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ بیابید.

« **پاسخ** »

$$f(۲)=۴ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲} \quad ۰/۵ \Rightarrow m_{\text{مماس}}=f'(۲)=-۳ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow m_{\text{قائم}}=\frac{۱}{۳} \quad ۰/۲۵$$

$y-۴=\frac{۱}{۳}(x-۲)$ ۰/۲۵ معادله ی خط قائم

۱۷- معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\cos x}{۲+\sin x}$ را در نقطه‌ی $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$ بنویسید.

« **پاسخ** »

$$y'=\frac{-\sin x(۲+\sin x)-\cos x(\cos x) \quad ۰/۵}{(۲+\sin x)^۲ \quad ۰/۲۵}=\frac{-۲\sin x-۱}{(۲+\sin x)^۲}\rightarrow m=-\frac{۱}{۴} \quad ۰/۲۵$$

معادله‌ی خط مماس : $y-y_۰=m(x-x_۰)\rightarrow y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}\times(x-۰)$ ۰/۵

۱۸- شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ را در نقطه‌ای به طول یک واقع بر آن به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$y' = \frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow m = f'(۱) = \frac{-۱}{۱^۲} \Rightarrow m = -۱$$

۰/۵ ۰/۲۵

۱۹- معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $y = x^۳ - ۲x^۲ + ۱$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی بنویسید.

« **پاسخ** »

$$x = ۲ \Rightarrow y = ۱ \quad ۰/۲۵$$

$$y' = ۳x^۲ - ۴x \Rightarrow m = f'(۲) = ۴ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow m' = \frac{-۱}{m} = \frac{-۱}{۴} \quad ۰/۲۵$$

$$y - ۱ = \frac{-۱}{۴}(x - ۲) \quad ۰/۲۵$$

۲۰- در چه نقاطی از بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$، خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sin x$ موازی محور xهاست؟

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \cos x = ۰ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲}, \ \frac{۳\pi}{۲} \quad ۰/۵ \quad \Rightarrow \left(\frac{\pi}{۲}, ۱\right) \quad ۰/۲۵ \ , \ \left(\frac{۳\pi}{۲}, -۱\right) \quad ۰/۲۵$$

۲۱- با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^۳$ را در نقطه‌ی دلخواه a حساب کنید، سپس معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه‌ی $A(۱, ۱)$ به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(a) = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^۳ - a^۳}{x - a}}_{۰/۲۵} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^۲ + ax + a^۲) \ ۰/۲۵}{x - a} = ۳a^۲ \quad ۰/۲۵$$

$$m_۱ = ۳ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow m_۲ = -\frac{۱}{۳} \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow y - ۱ = -\frac{۱}{۳}(x - ۱) \quad ۰/۲۵$$

۲۲- معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

$$y = \cos^{۲} x - \cos x - ۲ \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{۶}$$

« **پاسخ** »

$$y' = -۲\cos x \sin x + \sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{-\sqrt{۳}+۱}{۲} \; , \; A\left(\frac{\pi}{۶}, \frac{-۵-۲\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

$$\text{خط مماس} : y + \frac{۵+۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}\left(x - \frac{\pi}{۶}\right) , \; \text{خط قائم} : y + \frac{۵+۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)$$

۲۳- اگر $f(x) = \sin^{۲} x - \cos ۲x$، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f''\left(\frac{\pi}{۶}\right)$ ب) $f''\left(\frac{\pi}{۲}\right) - f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)$

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \underbrace{۲\sin x \cos x}_{\sin ۲x} + ۲\sin ۲x = ۳\sin ۲x \Rightarrow f''(x) = ۶\cos ۲x$$

الف) $f''\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۶\cos ۲\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۳$

ب)

$$f''\left(\frac{\pi}{۲}\right) - f'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۶\cos\left(۲\times\frac{\pi}{۲}\right) - ۳\sin\left(۲\times\frac{\pi}{۲}\right) = ۶\cos\pi - ۳\sin\pi = ۶(-۱) - ۳(۰) = -۶$$

۲۴- مشتق توابع داده شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = (۳x^{۲} - ۴)(۲x - ۵)^{۳}$

ب) $f(x) = \dfrac{x^{۲} - ۳x + ۱}{-۳x + ۲}$

پ) $f(x) = \left(\sqrt{۳x + ۲}\right)\left(x^{۳} + ۱\right)$

ت) $f(x) = \dfrac{۹x - ۲}{\sqrt{x}}$

« **پاسخ** »

الف) $f(x) = (۳x^{۲} - ۴)(۲x - ۵)^{۳} \Rightarrow f'(x) = ۶x(۲x - ۵)^{۳} + ۳(۲)(۲x - ۵)^{۲}(۳x^{۲} - ۴)$

ب) $f(x) = \dfrac{x^{۲} - ۳x + ۱}{-۳x + ۲} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(۲x - ۳)(-۳x + ۲) - (-۳)(x^{۲} - ۳x + ۱)}{(-۳x + ۲)^{۲}}$

پ) $f(x) = \left(\sqrt{۳x + ۲}\right)\left(x^{۳} + ۱\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۲}}\left(x^{۳} + ۱\right) + ۳x^{۲}\sqrt{۳x + ۲}$

ت) $f(x) = \dfrac{۹x - ۲}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{۹\sqrt{x} - \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x - ۲)}{\left(\sqrt{x}\right)^{۲}} = \dfrac{۹x + ۲}{۲x\sqrt{x}}$

۲۵- اگر $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$ مطلوب است، $(f + g)'(۱)$ و $(۳f + ۲g)'(۱)$

« **پاسخ** »

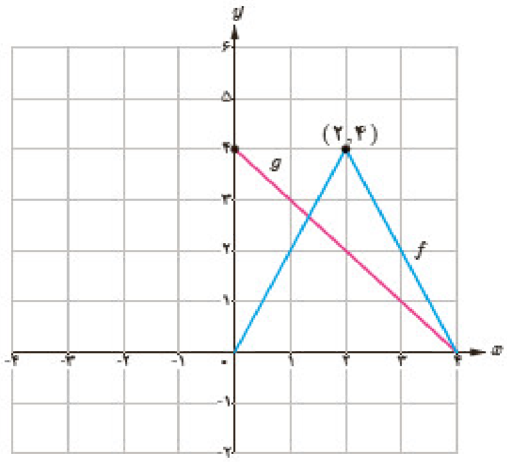
$(f + g)'(۱) = f'(۱) + g'(۱) = ۳ + ۵ = ۸$

$(۳f + ۲g)'(۱) = ۳f'(۱) + ۲g'(۱) = ۳ \times ۳ + ۲ \times ۵ = ۱۹$

۲۶- نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$



« **پاسخ** »

الف) $f'(۱) = ۲$

$g'(۱) = ۱$

$f'(۲) =$ وجود ندارد

$g'(۲) = ۱$

$f'(۳) = -۲$

$g'(۳) = -۱$

$h'(۱) = f'(۱)g(۱) + g'(۱)f(۱) = ۲\times۳ + (-۱)\times۲ = ۴$

$h'(۲) = f'(۲)g(۲) + g'(۲)f(۲) =$ وجود ندارد چون $f'(۲)$ وجود ندارد

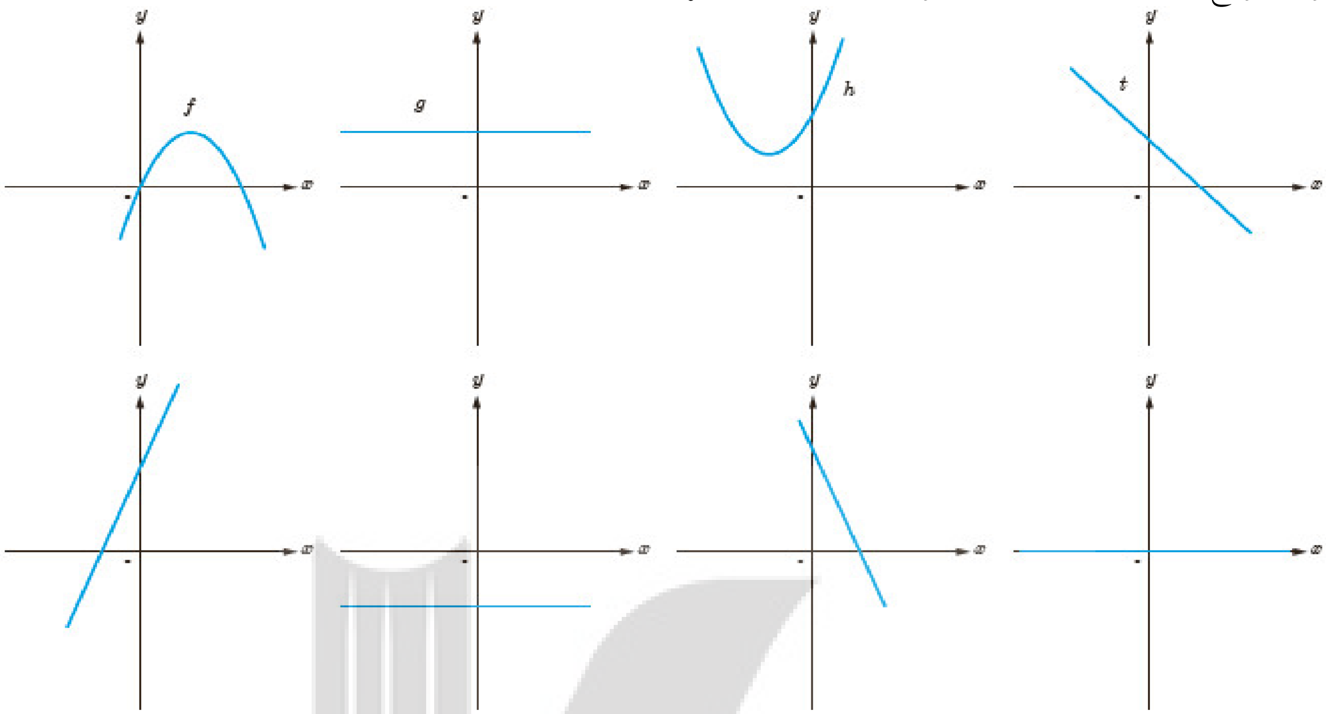
$h'(۳) = f'(۳)g(۳) + g'(۳)f(۳) = -۲(۱) + (-۱)(۲) = -۲ -۲ = -۴$

ب) $k'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{(g(۱))^۲} = \frac{۲\times۳ - (-۱)۲}{(۳)^۲} = \frac{۸}{۹}$

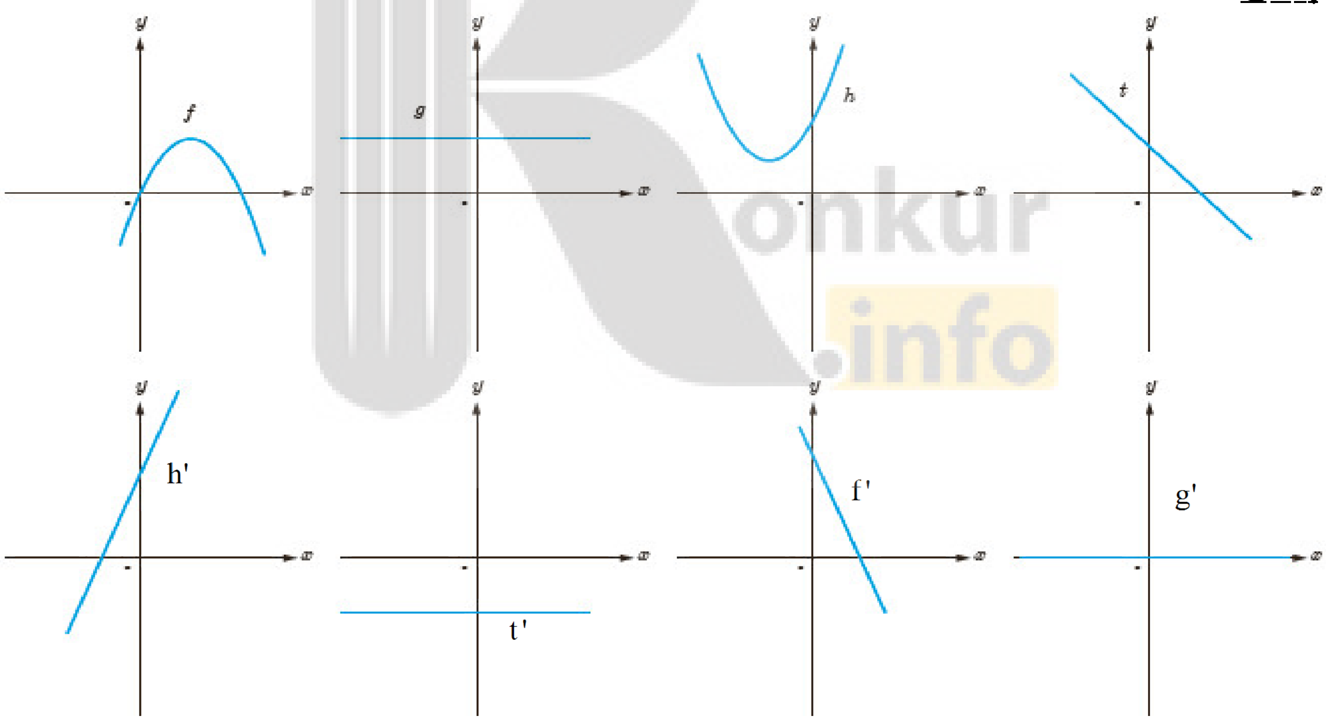
$k'(۲) =$ وجود ندارد چون $f'(۲)$ وجود ندارد

$k'(۳) = \frac{f'(۳)g(۳) - g'(۳)f(۳)}{(g(۳))^۲} = \frac{-۲\times۱ - (-۱)\times۲}{(۱)^۲} = ۰$

۲۷- نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آن‌ها، نظیر کنید.



« **پاسخ** »



۲۸- مشتق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}$ را به دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

« **پاسخ** »

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}}{x}\times\frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt[۳]{x}}\begin{cases} f'_{+}(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=\dfrac{۱}{۰^{+}}=+\infty \\ f'_{-}(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\dfrac{۱}{\sqrt{x}}=\dfrac{۱}{۰^{-}}=-\infty \end{cases}$$

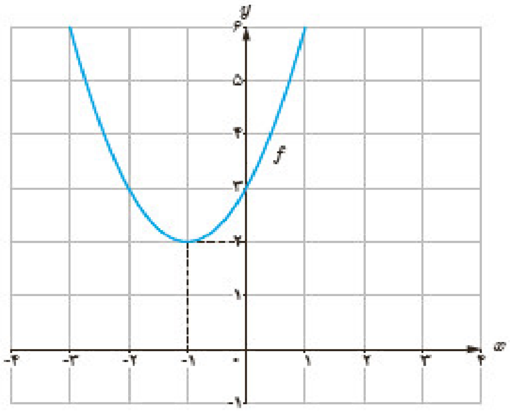
تابع در $x=۰$ مماس قائم دارد زیرا مشتق راست و چپ آن $+\infty$ و $-\infty$ شده است.

۲۹- سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آن‌ها با هم برابر باشند.

« **پاسخ** »

$$f(x)=۳x\ ,\ g(x)=۳x+۱\ ,\ h(x)=۳x-۴$$

۳۰- الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.



$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

« پاسخ »

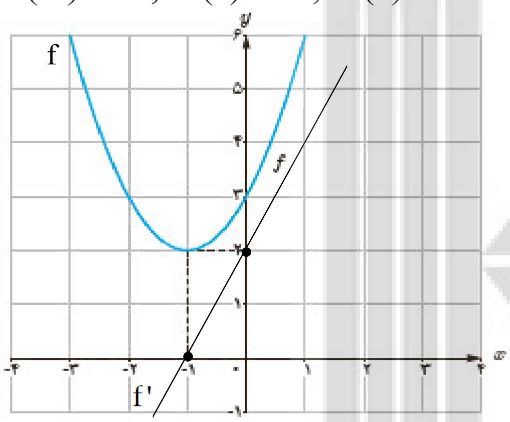
الف) $f'(-1) = 0 < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

ب) $f'(x) = 2x + 2$

$f'(2) = 6$

$f'(-1) = 0\ ,\ f'(0) = 2\ ,\ f'(3) = 8$

پ)



۳۱- تابع $f(x) = \begin{cases} ۵x - ۴ & x < ۰ \\ x^۲ & ۰ \le x \le ۳ \\ x + ۶ & x > ۳ \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

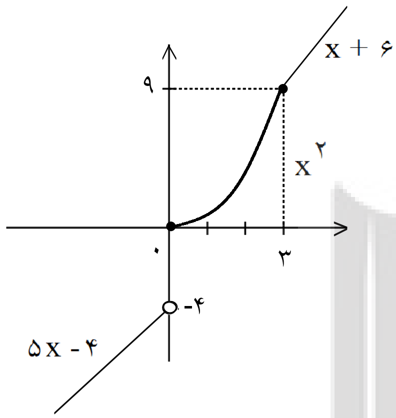
ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

« پاسخ »

الف)



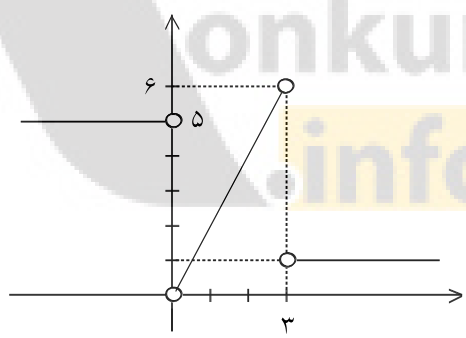
ب) $f'(۰)$ وجود ندارد چون تابع در $x = ۰$ ناپیوسته است.

$f'_+(۳) = ۱ \;,\; f'_-(۳) = ۶ \Rightarrow$ $f'(۳)$ وجود ندارد

پ)

$$f'(x) = \begin{cases} ۵ & x < ۰ \\ ۲x & ۰ < x < ۳ \\ ۱ & x > ۳ \end{cases}$$

ت)



۳۲- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = (x^۴ - ۳x)^۵$ ب) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{۱ - x}$

« **پاسخ** »

الف) $f'(x) = \underbrace{۵}_{۰/۲۵} \underbrace{(x^۴ - ۳x)^۴}_{۰/۲۵} \underbrace{(۴x^۳ - ۳)}_{۰/۲۵}$

ب) $g'(x) = \dfrac{\overbrace{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱ - x)}^{۰/۲۵} - \overbrace{(-۱)\sqrt{x}}^{۰/۲۵}}{\underbrace{(۱ - x)^۲}_{۰/۲۵}}$

۳۳- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $y = \dfrac{x^۲ + ۱}{x^۳ + ۲x - ۵}$ ب) $y = Cos^۲(-۳x + ۱)$

« **پاسخ** »

الف) $y' = \dfrac{(۰/۲۵)\ ۲x(x^۳ + ۲x - ۵) - (x^۲ + ۱)(۳x^۲ + ۲)\ (۰/۵)}{(x^۳ + ۲x - ۵)^۲\ \ (۰/۲۵)}$

ب) $y' = -۳ \times ۲\ (۰/۵)\ Cos(-۳x + ۱)\ (۰/۲۵)\ (-Sin(-۳x + ۱))\ (۰/۲۵)$

۳۴- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲) = ۳$, $f'(۲) = ۱$, $g(۲) = -۳$ و $g'(۲) = ۲$، مقادیر $(fg)'(۲)$ و $(f + g)'(۲)$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$(fg)'(۲) = f'(۲)g(۲) + f(۲)g'(۲)\ \ (۰/۲۵) = ۱ \times (-۳) + ۳ \times ۲\ (۰/۲۵) = ۳\ (۰/۲۵)$

$(f + g)'(۲) = f'(۲) + g'(۲)\ \ (۰/۲۵) = ۳\ (۰/۲۵)$

۳۵- به ازای چه مقادیری از a، b و c تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ، x<۱ \\ ax^{۲}+bx+c & ، x\geq ۱ \end{cases}$ در نقطه $x=۱$ مشتق مرتبه دوم دارد؟

« **پاسخ** »

$\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x) \Rightarrow a+b+c=۱$ ۰/۲۵

$f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲} & x<۱ \\ ۲ax+b & x\geqslant ۱ \end{cases}$ ۰/۲۵, $f'_{+}(۱)=f'_{-}(۱)\rightarrow ۲a+b=۳$ ۰/۲۵

$f''(x)=\begin{cases} ۶x & x<۱ \\ ۲a & x\geqslant ۱ \end{cases}$ ۰/۲۵, $f''_{+}(۱)=f''_{-}(۱)\rightarrow ۲a=۶$ ۰/۲۵

$\rightarrow a=۳\ ,\ b=-۳\ ,c=۱$ ۰/۲۵

۳۶- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\dfrac{۱+\sin x}{\cos x}$

ب) $y=\sqrt[۴]{x^{۳}+۲x}$

ج) $y=\left(x^{۲}+\sqrt{x}\right)^{۳}+\left(۴\sin^{-۱}x\right)$

« **پاسخ** »

الف) $y'=\dfrac{\overset{۰/۲۵}{(\cos x)(\cos x)}-\overset{۰/۲۵}{(-\sin x)(۱+\sin x)}}{\underset{۰/۲۵}{(\cos x)^{۲}}}$

ب) $y'=\dfrac{\overset{۰/۲۵}{۳x^{۲}+۲}}{\underset{۰/۵}{۴\sqrt[۴]{(x^{۳}+۲x)^{۳}}}}$

ج) $y'=\underset{۰/۵}{۳\left(۲x+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)}\underset{۰/۲۵}{\left(x^{۲}+\sqrt{x}\right)^{۲}}+\underset{۰/۲۵}{\dfrac{۴}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}$

۳۷- فرض کنید $f(x) = x^{۶} - ۲x^{۴} - x + ۱$، حاصل $\lim\limits_{h \to ۰} \dfrac{f'(۱ + h) - f'(۱)}{h}$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۶x^{۵} - ۸x^{۳} - ۱ \quad (۰/۲۵) \qquad f''(x) = ۳۰x^{۴} - ۲۴x^{۲} \quad (۰/۲۵)$

$\lim\limits_{h \to ۰} \dfrac{f'(۱ + h) - f'(۱)}{h} = f''(۱) \quad (۰/۲۵) \rightarrow \lim\limits_{h \to ۰} \dfrac{f'(۱ + h) - f'(۱)}{h} = ۳۰(۱)^{۴} - ۲۴(۱)^{۲}$

$= ۶ \quad (۰/۲۵)$

۳۸- مشتق تابع مقابل را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) $h(x) = \cos^{۲}(۵x) - \tan\left(x^{۳} - ۴x\right)$

« **پاسخ** »

$h'(x) = \underset{۰/۲۵}{-۱۰ \sin(۵x)\cos(۵x)} - \underset{۰/۲۵}{\left(۳x^{۲} - ۴\right)}\underset{۰/۲۵}{\left(۱ + \tan^{۲}\left(x^{۳} - ۴x\right)\right)}$

۳۹- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\leqslant ۱ \\ x^{۲}+۳ & x>۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

مشتق‌پذیر نیست (۰/۲۵) زیرا

$f'_{+}(۱)=\underset{۰/۲۵}{\lim\limits_{x\to ۱^{+}} \dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}}=\underset{۰/۲۵}{\lim\limits_{x\to ۱^{+}} \dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}}=۲ \quad (۰/۲۵) \quad , \quad f'_{-}(۱)=\underset{۰/۲۵}{\lim\limits_{x\to ۱^{-}} \dfrac{۳(x-۱)}{x-۱}}=۳ \quad (۰/۲۵)$

۴۰- اگر $f(x)=۲x^{۴}+۱$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۳}}$ باشند، مشتق تابع fog را در $x=۰$ بیابید.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۸x^{۳} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad g'(x)=\dfrac{-x}{(x^{۲}+۳)\sqrt{x^{۲}+۳}} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad g(۰)=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}} \quad (۰/۲۵)$

$(fog)'(۰)=f'(g(۰))\times g'(۰)=۸\left(\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^{۳}\times ۰=۰ \quad (۰/۲۵)$

۴۱- اگر $g(x)=x^{۳}+۳x+۱$ و $f'(x)=\sqrt{۷x-۳}$ باشند، مقدار $(fog)'(۰)$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

$g(۰)=۱$ ۰/۲۵ , $g'(x)=۳x^{۲}+۳$ ۰/۲۵

$(fog)'(۰)=f'(g(۰))\times g'(۰)=۲\times۳=۶$ ۰/۲۵

۰/۲۵

۴۲- مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = ۲$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -۳x^{۲} + ۶x + ۲ & x \geqslant ۲ \\ ۴\sqrt{x + ۲} - ۳x & x < ۲ \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x) = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x) = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۲ \rightarrow$$ در ۲ پیوسته است. f

$$f'(x) = \begin{cases} -۶x + ۶ & x > ۲ \\ \dfrac{۲}{\sqrt{x + ۲}}-۳ & x > ۲ \end{cases} \quad \begin{array}{l} f'_{+}(۲) = -۶ \\ f'_{-}(۲) = -۲ \end{array} \Rightarrow$$ f در $x = ۲$ مشتق ندارد.

۴۳- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) =\sqrt{t} + ۲t^{۳}$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

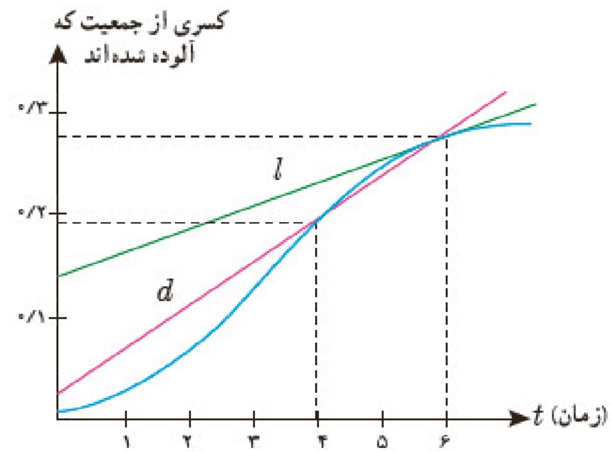
ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = ۳$ چه‌قدر است؟

« پاسخ »

الف) $\dfrac{m(۴) - m(۳)}{۴ - ۳} = \dfrac{۱۳۰ - \sqrt{۳} - ۵۴}{۱} \simeq ۷۴/۳g$

ب) $m'(t) = \dfrac{۱}{۲\sqrt{t}} + ۶t^{۲} \Rightarrow m'(۳) \simeq ۵۴/۳g$

۴۴- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.



الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.
ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t = ۱$، $t = ۲$ یا $t = ۳$ بیش‌تر است؟
پ) قسمت ب را برای $t = ۴$، $t = ۵$ و $t = ۶$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

الف) شیب خط L، آهنگ تغییر لحظه‌ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه‌ی $t = ۶$ (هفته‌ی ششم) نشان می‌دهد.
شیب خط d، آهنگ تغییر متوسط ، کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله‌ی زمانی $t = ۴$ تا $t = ۶$ (هفته‌ی چهارم تا هفته‌ی ششم) نشان می‌دهد.
ب) در $t = ۳$
پ) در $t = ۴$

۴۵- جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
T درجه حرارت	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:
الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.
ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.
پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

« **پاسخ** »

الف) $\frac{T(۱۲) - T(۸)}{۱۲ - ۸} = \frac{۱۹ - ۱۱}{۴} = ۲$

ب) $\frac{T(۱۸) - T(۱۲)}{۱۸ - ۱۲} = \frac{۹ - ۱۹}{۶} = -\frac{۵}{۳}$

پ) در بازه زمانی ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ ظهر، درجه حرارت با آهنگ ۲ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال افزایش است. امّا در بازه‌ی زمانی ساعت ۱۲ ظهر تا ساعت ۱۸ درجه حرارت با آهنگ $-\frac{۵}{۳}$ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال کاهش است.

۴۶- یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه‌ی زمانی [۳ , ۴] چه‌قدر است؟

« **پاسخ** »

آهنگ متوسط

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(۴) - x(۳)}{۴ - ۳} \ (۰/۲۵) = \frac{۱۳۰ - \left(\sqrt{۳} + ۵۴\right)}{۱} \ (۰/۵) = ۷۶ - \sqrt{۳} \ (۰/۲۵)$$

۴۷- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^۲$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = ۹$ چه‌قدر است؟

« **پاسخ** »

$$m'(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{t}} + ۲t \ (۰/۵) \Rightarrow m'(۹) = \frac{۱۰۹}{۶} \ (۰/۲۵)$$

۴۸- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(x) = ۲۰۰t^۲ - ۵۰t$ می‌باشد.

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = ۰$ تا $t = ۴$ به دست آورید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع را در نقطه‌ی $t = ۳$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

الف) $\frac{(f(۴) - f(۰))}{(۴ - ۰)} \ ۰/۲۵ = \frac{(۳۰۰۰ - ۰)}{۴} \ ۰/۲۵ = ۷۵۰ \ ۰/۲۵$

ب) $f'(t) = ۴۰۰t - ۵۰ \ ۰/۲۵ \Rightarrow f'(۳) = ۱۲۰۰ - ۵۰ = ۱۱۵۰ \ ۰/۲۵$

۴۹- آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \frac{x}{۲} + ۱$ را به ازای $x_۱ = ۲$ و $h = ۰/۲$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\frac{f(۲/۲) - f(۲)}{۰/۲} = \frac{۲/۱ - ۲}{۰/۲}}_{(۰/۵)} = \underbrace{\frac{۰/۱}{۰/۲}}_{(۰/۲۵)} = \frac{۱}{۲}$$

(صفحه ۱۲۶)

۵۰- معادله‌ی حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به صورت $f(t) = ۲t^۲ - ۵t + ۱$ است. آهنگ متوسط تغییر مکان این متحرک را وقتی از نقطه‌ی ۱ به ۲ تغییر مکان می‌دهد، بدست آورید.

« **پاسخ** »

$$\underbrace{\frac{f(t_۲) - f(t_۱)}{t_۲ - t_۱} = \frac{f(۲) - f(۱)}{۲ - ۱}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\frac{-۱ + ۲}{۱}}_{۰/۲۵} = ۱ \quad ۰/۲۵$$

۵۱- اگر $P(t)=۲+t^۲$ نمایش ازدیاد یک نوع باکتری در زمان t باشد (t زمان برحسب ساعت)، آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از $t_۰=۱$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\frac{P(t_۲)-P(t_۱)}{t_۲-t_۱}=\overset{۰/۲۵}{\frac{P(۶)-P(۱)}{۶-۱}}=\overset{۰/۵}{\frac{۳۸-۳}{۵}}=۷ \quad ۰/۲۵$$

۵۲- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = ۲x - ۱$ را وقتی متغیر از ۳ به ۳/۵ تغییر می‌کند، به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\overset{۰/۲۵}{\frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}} = \frac{f(۳/۵) - f(۳)}{۳/۵ - ۳} = \overset{۰/۲۵ \; ۰/۲۵}{\frac{۶ - ۵}{۰/۵}} = ۲ \quad ۰/۲۵$$

۵۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x)= x^۲-x+۳$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی از $x_۱=۱$ به $x_۲=۵$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\underset{۰/۲۵}{\frac{f(۵)-f(۱)}{۵-۱}}=\underset{۰/۲۵}{\frac{(۲۵-۵+۳)-(۱-۱+۳)}{۴}}=\underset{۰/۲۵}{۵}$$

۵۴- معادله‌ی حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به‌صورت $x(t) = ۳t^۲ - ۴t + ۲$ است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t = ۱$ و $t = ۳$ محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_۲) - x(t_۱)}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۷-۱}{۲} = ۸ \quad ۰/۲۵$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۵۵- متحرکی که بر محور x ها در حرکت است، دارای معادله‌ی $x = ۳t^۲ - ۴t + ۱$ می‌باشد. (t را بر حسب ثانیه و x را بر حسب سانتی‌متر بگیرید.)

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t = ۱$ و $t = ۳$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای آن را در زمان $t = ۲$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

الف) سرعت متوسط $= \frac{f(۳) - f(۱)}{۳ - ۱} = \frac{۱۶}{۲} = ۸$ ۰/۵

ب) $f'(x) = ۶t - ۴$ ۰/۲۵ $\longrightarrow f'(۲) = ۸ = V(۲)$ ۰/۲۵

۵۶- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^۲ - ۱$ را به ازای $x = ۳$ و $\Delta x = ۰/۵$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(۳/۵) - f(۳)}{۰/۵} = \frac{۱۱/۲۵ - ۸}{۰/۵} = ۶/۵$$

۵۷- توپی را با سرعت اولیه ۲۰ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت، از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، معادله حرکت به شکل $x = f(t) = -۴/۹t^۲ + ۲۰t$ است. مطلوب است محاسبه:

الف) سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاپ؟

ب) سرعت متوسط توپ از لحظه پرتاب تا پایان ثانیه دوم ($t = ۰$ تا $t = ۲$)؟

« **پاسخ** »

الف)

$$V = x' = f'(x) = -۹/۸t + ۲۰$$
$$f'(۱) = -۹/۸ \times ۱ + ۲۰ = ۱۰/۲$$

ب) سرعت متوسط $\frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{-۴/۹ \times ۲^۲ + ۲۰ \times ۲ - ۰}{۲} = ۱۰/۲$

۵۸- تابع $f(x) = x^۲ - x + ۱$ را در نظر بگیرید:

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع f را وقتی متغیر از $x_۱ = ۱$ به $x_۲ = ۵$ تغییر کند، به‌دست آورید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه $x = ۳$ تعیین کنید.

« **پاسخ** »

الف) $f(۱) = (۱)^۲ - ۱ + ۱ = ۱\ ,\ f(۵) = (۵)^۲ - ۵ + ۱ = ۲۱ \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۵) - f(۱)}{۵ - ۱} = \frac{۲۱ - ۱}{۴} = ۵$

ب) $f'(x) = ۲x - ۱ \Rightarrow f'(۳) = ۲ \times ۳ - ۱ = ۵$

۵۹- متحرکی بر محور xها در حرکت است و دارای معادله‌ی $x(t) = t^۲ + ۴t + ۱$ می‌باشد.

اولا: سرعت متوسط متحرک را در فاصله زمانی $t_۱ = ۱$ و $t_۲ = ۳$ به دست آورید.

ثانیا: سرعت لحظه‌ای در $t = ۳$ را به دست آورید. (t بر حسب ثانیه و x بر حسب سانتی‌متر)

« **پاسخ** »

سرعت متوسط: $x(t) = t^۲ + ۴t + ۱ \rightarrow \begin{cases} x(۱) = ۶ \\ x(۳) = ۲۲ \end{cases} \qquad \frac{x(۳) - x(۱)}{۳ - ۱} = \frac{۲۲ - ۶}{۲} = ۸$

سرعت لحظه‌ای: $x'(t) = ۲t + ۴ \rightarrow x'(۳) = ۱۰$

۶۰- متحرکی که بر محور xها در حرکت است دارای معادله‌ی حرکت $x = ۳t^۲ - ۴t + ۱$ می‌باشد. (t بر حسب ثانیه و x بر حسب سانتی‌متر)

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = ۱$ تا $t = ۳$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای آن را در زمان $t = ۲$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$x = ۳t^۲ - ۴t + ۱$

الف : $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(۳) - x(۱)}{۳ - ۱} = \frac{(۲۷ - ۱۲ + ۱) - (۳ - ۴ + ۱)}{۲} = \frac{۱۶ - ۰}{۲} = ۸$

ب : $x'(t) = ۶t - ۴ \xrightarrow{t = ۲} x'(۲) = ۱۲ - ۴ = ۸$

تذکّر: وقتی معادله حرکت درجه ۲ باشد، تساوی الف و ب صورت می‌پذیرد.