

بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

[WWW.KONKUR.INFO](http://WWW.KONKUR.INFO)

**K**onkur  
**.info**

۳۵- با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب}) \qquad \frac{1}{\sin \theta} \times \text{tg} \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت}) \qquad \frac{1 + \text{tg} \alpha}{1 + \text{Cot} \alpha} = \text{tg} \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \text{tg} x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$

« پاسخ »

$$\text{چپ} = \frac{1}{\cancel{\sin \theta}} \times \frac{\cancel{\sin \theta}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\text{چپ} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{\cancel{\cos^2 \theta}} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

$$\text{چپ} = \frac{1 + \text{tg} \alpha}{1 + \text{Cot} \alpha} = \frac{1 + \text{tg} \alpha}{1 + \frac{1}{\text{tg} \alpha}} = \frac{\text{tg} \alpha (1 + \text{tg} \alpha)}{\text{tg} \alpha + 1} = \text{tg} \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\text{چپ} = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} \quad (\text{ت})$$

$$= 1 - 1 + \sin x = \sin x$$

$$\text{چپ} = \frac{1}{\cos x} - \text{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \quad (\text{ث})$$

$$= \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x} (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

۳۶- اگر  $\sqrt{3} = \text{tg} 240^\circ$ ، آن‌گاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $240^\circ$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \sin \alpha = \text{tg} \alpha \cos \alpha$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۷- اگر  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos^2 135^\circ = 1 - \sin^2 135^\circ = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

۳۸- فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{-3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

۳۹- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

« پاسخ »

الف)  $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$  تساوی صحیح نیست

ب)  $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{6}{16}$

$\Rightarrow$  تساوی صحیح است

حال باید درستی آنرا در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2}_1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

۴۰- در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت برحسب کسینوس یک زاویه و هم‌چنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0) \quad (2)$$

(۳) اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0) \quad (2)$$

$$3) \frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

۴۱- اگر  $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم باشد، مقدار  $\operatorname{tg} \alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

در ربع سوم:  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha < 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left( \frac{-\sqrt{5}}{5} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{5}}{\frac{-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$

۴۲- اگر  $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$  و  $\theta$  در ربع سوم مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.

« پاسخ »

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۴۳- فرض کنید  $\theta$  زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و  $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \theta}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{3}{5}, \operatorname{Cotg} \theta = \frac{4}{3}$$

۴۴- فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد و  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ ، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{17}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{17} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\operatorname{Cotg} \alpha = 4$$

۴۵- ثابت کنید:

$$\frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{\operatorname{Cotg} x - \cos x}{\cos x} = \frac{2}{\sin x}$$

« پاسخ »

$$\frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{\operatorname{Cotg} x - \cos x}{\cos x} = \frac{(1 + \sin x)\cos x + \sin x \left( \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x \right)}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{(1 + \sin x)\cos x + \sin x \left( \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x \right)}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\cos x + \cancel{\sin x \cos x} + \cos x - \cancel{\sin x \cos x}}{\sin x \cos x} = \frac{2\cos x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin x}$$

سمت چپ تساوی با سمت راست آن برابر شده، پس رابطه‌ی داده شده صحیح است.

۴۶- اتحاد مثلثاتی  $\frac{1}{\sin x} - \operatorname{Cotg} x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  را ثابت کنید.

« پاسخ »

۱/۲۵ نمره

$$\frac{1}{\sin x} - \operatorname{Cotg} x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin x}(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

۴۷- اتحاد مثلثاتی  $\frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = \text{Sin}^2 \theta$  را ثابت کنید.

« پاسخ »  
نمره ۰/۵

$$1 + \text{tg}^2 \theta = \frac{1}{\text{Cos}^2 \theta} \Rightarrow \frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = \frac{\frac{\text{Sin}^2 \theta}{\text{Cos}^2 \theta}}{\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta}} = \text{Sin}^2 \theta$$

۴۸- اگر  $\text{Sin} 15^\circ = \frac{1}{4}$  باشد، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $15^\circ$  را به دست آورید.

« پاسخ »  
نمره ۰/۷۵

$90^\circ < 150^\circ < 180^\circ \Rightarrow \theta = 150^\circ$  در ناحیه دوم قرار دارد

در ناحیه دوم  $\text{Sin} \theta$  مثبت و بقیه‌ی نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  منفی هستند، پس داریم:

$$\text{Cos} 150^\circ = -\sqrt{1 - \text{Sin}^2 150^\circ} = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg} 150^\circ = \frac{\text{Sin} 150^\circ}{\text{Cos} 150^\circ} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}, \quad \text{Cotg} 150^\circ = \frac{1}{\text{tg} 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{15}}} = -\sqrt{15}$$

۴۹- درستی تساوی  $\frac{1 - \text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = 2 \text{Cos}^2 \theta - 1$  را ثابت کنید.

« پاسخ »  
نمره ۱/۲۵

$$\begin{aligned} \frac{1 - \text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} &= \frac{1 - \frac{\text{Sin}^2 \theta}{\text{Cos}^2 \theta}}{\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta}} = \frac{\frac{\text{Cos}^2 \theta - \text{Sin}^2 \theta}{\text{Cos}^2 \theta}}{\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta}} = \text{Cos}^2 \theta - \text{Sin}^2 \theta \\ &= \text{Cos}^2 \theta - (1 - \text{Cos}^2 \theta) = 2 \text{Cos}^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

۵۰- درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف -  $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{Cotg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

ب -  $\frac{\operatorname{Cos} \theta}{1 + \operatorname{Sin} \theta} = \frac{1 - \operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta}$

« پاسخ »

۲ نمره

$$\begin{aligned} \text{الف-} \quad \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{Cotg} \alpha} &= \frac{\frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} + \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}}{\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} + \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}}{\frac{\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha}} = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \\ \text{ب-} \quad \frac{\operatorname{Cos} \theta}{1 + \operatorname{Sin} \theta} \times \frac{1 - \operatorname{Sin} \theta}{1 - \operatorname{Sin} \theta} &= \frac{\operatorname{Cos} \theta (1 - \operatorname{Sin} \theta)}{1 - \operatorname{Sin}^2 \theta} = \frac{\operatorname{Cos} \theta (1 - \operatorname{Sin} \theta)}{\operatorname{Cos}^2 \theta} = \frac{1 - \operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta} \end{aligned}$$

۵۱- مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

$A = ((\operatorname{Sin}^2(50^\circ) + \operatorname{Cos}^2(50^\circ)) + 2 \operatorname{tan}^2(45^\circ))$

« پاسخ »

$A = (\operatorname{Sin}^2(50^\circ) + \operatorname{Cos}^2(50^\circ) + 2 \operatorname{tan}^2(45^\circ)) = 1 + 2(1)^2 = 3 \quad (1)$

۵۲- درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

$\frac{2 \operatorname{tan} \theta}{1 + \operatorname{tan}^2 \theta} = 2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta$

« پاسخ »

$$\frac{2 \operatorname{tan} \theta}{1 + \operatorname{tan}^2 \theta} = \frac{\frac{2 \operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta}}{\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \theta}} = \frac{2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos}^2 \theta}{\operatorname{Cos} \theta} = 2 \operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta$$



۵۳- درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$\frac{2 \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 30^\circ} = 2 \sin 90^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\cos^2 \theta (2 + \tan^2 \theta) = 2 - \sin^2 \theta \quad (\text{ب})$$

« پاسخ »

$$\frac{2 \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 30^\circ} = 2 \sin 90^\circ \Rightarrow \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \quad (\text{الف})$$

(ب)

$$\begin{aligned} \text{طرف اول} &= \cos^2 \theta (2 + \tan^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = 2(1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta = \\ &= 2 - 2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 - \sin^2 \theta = \text{طرف دوم} \end{aligned}$$

۵۴- اگر  $\cot \alpha = m - 1$ ،  $\sin \alpha = \frac{1}{m+1}$  باشد مقدار عددی  $\cos \alpha$  را بیابید.

« پاسخ »

در رابطه‌ی  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  مقادیر  $\cot \alpha$ ،  $\sin \alpha$  را از فرض سؤال قرار می‌دهیم.

$$1 + (m - 1)^2 = (m + 1)^2 \Rightarrow 1 + m^2 - 2m + 1 = m^2 + 2m + 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \text{ در ربع دوم است.}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

۵۵- اگر  $\cot \theta = 2$  باشد حاصل عددی عبارت  $\frac{3 \sin \theta + 2 \cos \theta}{5 \sin \theta - 4 \cos \theta}$  را بیابید.

« پاسخ »

$$\cot \theta = 2 \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \Rightarrow \cos \theta = 2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{3 \sin \theta + 2 \cos \theta}{5 \sin \theta - 4 \cos \theta} = \frac{3 \sin \theta + 2(2 \sin \theta)}{5 \sin \theta - 4(2 \sin \theta)} = \frac{7 \sin \theta}{-3 \sin \theta} = -\frac{7}{3}$$

۵۶- اگر  $\sin\theta + \cos\theta = a$  باشد، مطلوبست محاسبه‌ی عبارت مثلثاتی  $\sin\theta \cdot \cos\theta$  برحسب  $a$ .

« پاسخ »

$$\sin\theta + \cos\theta = a \Rightarrow (\sin\theta + \cos\theta)^2 = a^2 \Rightarrow 1 + 2\sin\theta \cos\theta = a^2$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta \cos\theta = a^2 - 1 \Rightarrow \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{a^2 - 1}{2}$$



بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

**WWW.KONKUR.INFO**

**K**onkur  
**.info**